三次元澱み点流れ

本稿では，非圧縮性流れを仮定した Navier-Stokes 方程式の厳密解の一例として，三次元澱み点流れを考える．平板に沿う方向にそれぞれ x, y 軸を取り，それに直交する方向に z 軸を取るものとする．

壁面から十分に離れた領域では，ポテンシャル流れと見なされ，それは次式で与えられる．

$$u = ax, \quad v = by, \quad w = -(a+b)z \quad (a > 0, \quad b = Ca > 0) \tag{1}$$

澱み点を原点とする三次元デカルト座標系の連続の式，および Navier-Stokes の運動方程式は，

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{3}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{4}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{5}$$

と与えられる．相似解を仮定できるとき，境界層の内外の領域において

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

が成り立つ．式(5)を x で微分し，式(6)を適用すると

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0 \tag{7}$$

同様に，式(5)を y で微分し，式(6)を適用すると

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0 \tag{8}$$

これらの式の意味するところは，平板に沿う方向の圧力勾配が z 方向に変化しないということである．つまり，

$$\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial x} = f_1(x,y), \quad \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial y} = f_2(x,y) \tag{9}$$

であるから，層の内外で平板に沿う方向の圧力勾配は変化しない．次に，式(3), (4)を無次元化するにあたり，以下のように無次元変数を置く．

$$X=\frac{x}{x_a},\quad Y=\frac{y}{y_a},\quad Z=\frac{z}{z_a},\quad U=\frac{u}{u_a},\quad V=\frac{v}{v_a},\quad W=\frac{w}{w_a} \tag{10}$$

大文字は無次元変数を示し，右辺の下付添え字 a が付くものが未定参照量を示す．式(10)を式(3)（ゼロになる項を落とした式）に代入すると，

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial X}+\underbrace{\frac{w_a x_a}{z_a u_a}}_{[1]}W\frac{\partial U}{\partial Z}=-\frac{x_a}{\rho u_a{}^2}\frac{\partial P}{\partial X}+\underbrace{\frac{\nu x_a}{z_a{}^2 u_a}}_{[2]}\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}$$

同様に，式(10)を式(4)（ゼロになる項を落とした式）に代入すると，

$$v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$V\frac{\partial V}{\partial Y}+\underbrace{\frac{w_a y_a}{z_a v_a}}_{[3]}W\frac{\partial V}{\partial Z}=-\frac{p_a}{\rho v_a{}^2}\frac{\partial P}{\partial Y}+\underbrace{\frac{\nu y_a}{z_a{}^2 v_a}}_{[4]}\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}$$

境界条件

$$\begin{cases} z=0: \quad u=v=w=0 \\ z\to\infty: \quad u=ax,\quad v=by,\quad w=-(a+b)z \end{cases} \tag{11}$$

についても無次元化をする．

$$\begin{cases} Z=0: \quad U=V=W=0 \\ Z\to\infty: \quad U=\underbrace{\frac{ax_a}{u_a}}_{[5]}X,\quad V=\underbrace{\frac{by_a}{v_a}}_{[6]}Y,\quad W=-\underbrace{\frac{(a+b)z_a}{w_a}}_{[7]}Z \end{cases} \tag{12}$$

無次元速度は，以下の各無次元量に依存する．

$$(U,V,W)=f\left(X,Y,Z,\underbrace{\frac{w_a x_a}{z_a u_a}}_{[1]},\underbrace{\frac{\nu x_a}{z_a{}^2 u_a}}_{[2]},\underbrace{\frac{w_a y_a}{z_a v_a}}_{[3]},\underbrace{\frac{\nu y_a}{z_a{}^2 v_a}}_{[4]},\underbrace{\frac{ax_a}{u_a}}_{[5]},\underbrace{\frac{by_a}{v_a}}_{[6]},\underbrace{\frac{(a+b)z_a}{w_a}}_{[7]}\right) \tag{13}$$

これより，[1]～[8]の各無次元量について，未定参照量を決定していく．

[5] = 1 と置くことにより，$u_a=ax_a$ (14)

[2] = 1 と置くことにより，式(14)を代入し，$z_a=\sqrt{\dfrac{\nu x_a}{u_a}}=\sqrt{\dfrac{\nu}{a}}$ (15)

[1] = 1 と置くことにより，式(14)(15)を代入し， $w_a = \dfrac{z_a u_a}{x_a} = \dfrac{\sqrt{\nu/a}\cdot a x_a}{x_a} = \sqrt{a\nu}$ (16)

[3] = 1 と置くことにより， $\dfrac{w_a y_a}{z_a v_a} = 1, \quad \Rightarrow \quad v_a = \dfrac{w_a y_a}{z_a} = \dfrac{\sqrt{a\nu}\, y_a}{\sqrt{\nu/a}} = a y_a$ (17)

[4] は $\dfrac{\nu y_a}{{z_a}^2 v_a} = \dfrac{\nu y_a}{(\nu/a) a y_a} = 1$

[6] は $\dfrac{b y_a}{v_a} = \dfrac{b}{a} = C$ (18)

[7] は $\dfrac{(a+b) z_a}{w_a} = \dfrac{(a+b)}{\sqrt{a\nu}}\sqrt{\dfrac{\nu}{a}} = 1 + \dfrac{b}{a} = 1 + C$ (19)

さらに，$X = 1$, $Y = 1$ と置き，相似解を仮定する．無次元速度は，η と C に依存することがわかる．

$$(U, V, W) = f\left(1, 1, Z, \underbrace{1}_{[1]}, \underbrace{1}_{[2]}, \underbrace{1}_{[3]}, \underbrace{1}_{[4]}, \underbrace{1}_{[5]}, \underbrace{C}_{[6]}, \underbrace{1+C}_{[7]}\right) = f(\eta, C)$$

つまり，式(10)は次式のように置き換えられる．

$$X = \frac{x}{x_a} = 1, \quad Y = \frac{y}{y_a} = 1, \quad Z = \frac{z}{z_a} = \eta = z\sqrt{\frac{a}{\nu}}, \quad C = \frac{b}{a},$$
$$U(\eta) = \frac{u(x,z)}{ax}, \quad V(\eta) = \frac{v(y,z)}{ay}, \quad W(\eta) = \frac{w(z)}{\sqrt{a\nu}} \qquad (20)$$

式(20)を利用して，各項を求める．

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(axU) = aU, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(axU) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(axU) = ax\frac{dU}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} = axU'\sqrt{\frac{a}{\nu}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(ayV) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(ayV) = aV, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(ayV) = ay\frac{dV}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} = ayV'\sqrt{\frac{a}{\nu}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(aU) = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(axU'\sqrt{\frac{a}{\nu}}\right) = ax\sqrt{\frac{a}{\nu}}\frac{dU'}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{a^2 x}{\nu}U''$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(ayV'\sqrt{\frac{a}{\nu}}\right)=ay\sqrt{\frac{a}{\nu}}\frac{dV'}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}=\frac{a^2y}{\nu}V''$$

これらを式(3)に代入し，

$$axU\cdot aU+\sqrt{a\nu}W\cdot axU'\sqrt{\frac{a}{\nu}}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{a^2x}{\nu}U''$$

また，式(4)に代入すると，

$$ayV\cdot aV+\sqrt{a\nu}W\cdot ayV'\sqrt{\frac{a}{\nu}}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\frac{a^2y}{\nu}V''$$

整理して次式を得る．

$$\begin{aligned}
&\underbrace{U^2+WU'-U''}_{\text{function of } z}=\underbrace{-\frac{1}{\rho a^2x}\overbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}^{f_1(x,y)}}_{\text{function of } x,y}\equiv -P_X\\
&\underbrace{V^2+WV'-V''}_{\text{function of } z}=\underbrace{-\frac{1}{\rho a^2y}\overbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}^{f_2(x,y)}}_{\text{function of } x,y}\equiv -P_Y
\end{aligned}\qquad(21)$$

これからわかるように，左辺は z の関数であり，右辺は x,y の関数であるから，結局はそれぞれが定数でなければならない．右辺に示される無次元の接線方向の圧力勾配を次式で定義する．

$$\begin{aligned}
P_X&\equiv\frac{1}{\rho a^2x}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{f_1(x,y)}{\rho a^2x}=\frac{k_{p1}}{\rho a^2}=\text{const.}\\
P_Y&\equiv\frac{1}{\rho a^2y}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{f_2(x,y)}{\rho a^2y}=\frac{k_{p2}}{\rho a^2}=\text{const.}
\end{aligned}\qquad(22)$$

ここで，どちらの k_p も定数であり，境界層外のポテンシャル流の状況から決めることができる．式(22)を x, y でそれぞれ積分して，次式のように圧力分布が x, y の関数と z の関数の和として表現されることが示される．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x}&=k_{p1}x\quad\Rightarrow\quad p(x,y,z)=\frac{1}{2}k_{p1}x^2+p_1(y,z)\\
\frac{\partial p}{\partial y}&=k_{p2}y\quad\Rightarrow\quad p(x,y,z)=\frac{1}{2}k_{p2}y^2+p_2(x,z)
\end{aligned}$$

これらの式をまとめて一つの式に書き換えれば，次のようになる．

$$p(x,y,z)=\frac{1}{2}\left(k_{p1}x^2+k_{p2}y^2\right)+p_3(z)\qquad(23)$$

次に，k_{p1},k_{p2} を求める．ポテンシャル領域における x 方向および y 方向の運動方程式はそ

れぞれ，次式で与えられる．

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\qquad v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

これに，式(1)および(23)を代入して，

$$\begin{aligned} &ax\cdot a=-\frac{1}{\rho}k_{p1}x \quad\Rightarrow\quad k_{p1}=-\rho a^2 \\ &by\cdot b=-\frac{1}{\rho}k_{p2}y \quad\Rightarrow\quad k_{p2}=-\rho b^2 \end{aligned} \tag{24}$$

無次元圧力勾配は，式(22)から

$$\begin{aligned} P_X&=\frac{k_{p1}}{\rho a^2}=\frac{-\rho a^2}{\rho a^2}=-1 \\ P_Y&=\frac{k_{p2}}{\rho a^2}=\frac{-\rho b^2}{\rho a^2}=-C^2 \end{aligned} \tag{25}$$

と求まる．結局，x 方向および y 方向の運動方程式は

$$\begin{aligned} &U^2+WU'=1+U'' \\ &V^2+WV'=C^2+V'' \end{aligned} \tag{26}$$

また

$$\frac{\partial w}{\partial z}\quad\Rightarrow\quad a\frac{dW}{d\eta}$$

であるから，連続の式は，以下のように得られる．

$$U+V+W'=0 \tag{27}$$

続いて，式(5)の各項を求める．z 方向の運動方程式は，圧力を求めるためだけに使われるが，参考までに示す．

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{a\nu}W\right)=\sqrt{a\nu}\frac{\partial W}{\partial z}=\sqrt{a\nu}\frac{dW}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}=\sqrt{a\nu}\frac{dW}{d\eta}\sqrt{\frac{a}{\nu}}=a\frac{dW}{d\eta}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(a\frac{dW}{d\eta}\right)=a\frac{d^2W}{d\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial z}=a\sqrt{\frac{a}{\nu}}\frac{d^2W}{d\eta^2}$$

これらの結果を式(5)に代入し，

$$\sqrt{a\nu}W\cdot a\frac{dW}{d\eta}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu a\sqrt{\frac{a}{\nu}}\frac{d^2W}{d\eta^2}$$

整理すると，

$$W\frac{dW}{d\eta}=-\frac{1}{\rho a\sqrt{a\nu}}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{d^2W}{d\eta^2}$$

圧力項に対して，式(23)を代入すると，

$$W\frac{dW}{d\eta}=-\frac{1}{\rho a\sqrt{a\nu}}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2}\left(k_{p1}x^2+k_{p2}y^2\right)+p_3\left(z\right)\right]+\frac{d^2W}{d\eta^2}$$

$$W\frac{dW}{d\eta}=-\frac{1}{\rho a\sqrt{a\nu}}\frac{dp_3\left(z\right)}{dz}+\frac{d^2W}{d\eta^2}$$

ここで， $p_3\left(z\right)=\rho a\nu P\left(\eta\right)$ と置けば，

$$\boxed{W\frac{dW}{d\eta}=-\frac{dP}{d\eta}+\frac{d^2W}{d\eta^2}} \tag{28}$$

を得る．最終的に，無次元量の定義は以下の通りである．

$$\begin{aligned}&\eta=z\sqrt{\frac{a}{\nu}},\quad u\left(x,z\right)=ax\cdot U\left(\eta\right),\quad v\left(y,z\right)=ay\cdot V\left(\eta\right),\\&w\left(z\right)=\sqrt{a\nu}\cdot W\left(\eta\right),\quad p\left(x,y,z\right)=-\frac{1}{2}\rho\left(a^2x^2+b^2y^2\right)+\rho a\nu\cdot P\left(\eta\right)\end{aligned} \tag{29}$$

<u>数式のまとめ</u>

以下の連立常微分方程式を反復法などで解く．

$U+V+W'=0$	W を求める
$-U^2-WU'+1+U''=0$	U を求める
$-V^2-WV'+C^2+V''=0$	V を求める
$P=-\frac{1}{2}W^2+W'$	P を求める

B. C.

$$\begin{cases}\eta=0: & U=V=W=0\\ \eta\to\infty: & U=1,\quad V=C\end{cases}$$

なお，式(12)の境界条件において， $\eta\to\infty:\ W=-\left(1+C\right)\eta$ となるが，これを境界条件として与えることはできないことに注意．次頁に解析結果を示す．

解析結果

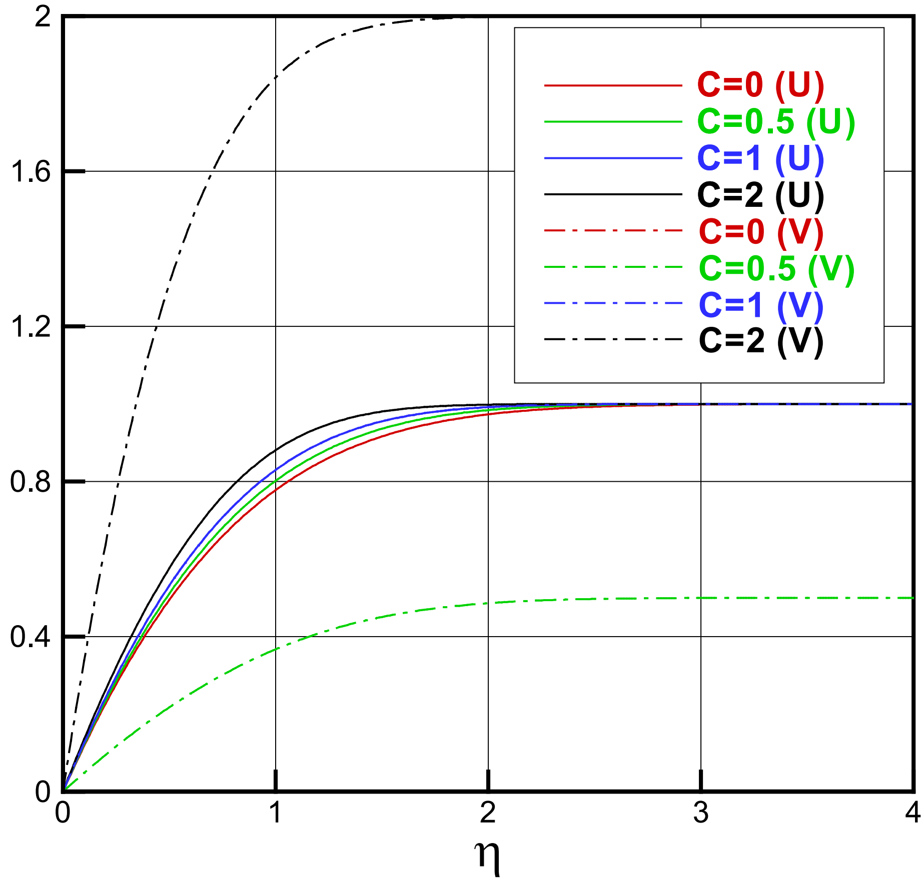

図１　三次元澱み点流れの計算結果

図 1 に解析結果を示す．実線は x 方向の速度成分 U を，一点鎖線は y 方向の速度成分 V を示す．$C=0$ では，二次元澱み点流れに等価であり $V=0$ となる．$C=1$ では，軸対称澱み点流れに等価であり，U と V の曲線は重なる．