軸対称澱み点流れ

本稿では，非圧縮性流れを仮定した Navier-Stokes 方程式の厳密解の一例として，軸対称澱み点流れを考える．壁面から十分に離れた領域では，ポテンシャル流れと見なされ，それは次式で与えられる（u, v, w はそれぞれ，半径方向，周方向，軸方向の速度成分とする）．

$$u = ar, \quad v = 0, \quad w = -2az \quad (a > 0) \tag{1}$$

軸対称円筒座標系の Navier-Stokes の運動方程式は，

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{2}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{3}$$

と与えられる．相似解を仮定できるとき，境界層の内外の領域において

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \tag{4}$$

が成り立つ．式(3)を r で微分し，式(4)を適用すると

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) = 0 \tag{5}$$

この式の意味するところは，半径方向の圧力勾配が z 方向に変化しないということである．つまり，

$$\frac{\partial p(r,z)}{\partial r} = f(r) \tag{6}$$

となる．次に，式(2)を無次元化するにあたり，以下のように無次元変数を置く．

$$R = \frac{r}{r_a}, \quad Z = \frac{z}{z_a}, \quad U = \frac{u}{u_a}, \quad W = \frac{w}{w_a} \tag{7}$$

大文字は無次元変数を示し，右辺の下付添え字 a が付くものが未定参照量を示す．式(7)を式(2)に代入し整理すると，

$$U\frac{\partial U}{\partial R} + \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]} W\frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{r_a}{\rho {u_a}^2}\frac{\partial p}{\partial r} + \underbrace{\frac{\nu}{r_a u_a}}_{[2]}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R^2}\right) + \underbrace{\frac{\nu r_a}{{z_a}^2 u_a}}_{[3]}\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \tag{8}$$

境界条件

$$\begin{cases} z = 0: \quad u = w = 0 \\ z \to \infty: \quad u = ar, \quad w = -2az \end{cases} \tag{9}$$

についても無次元化をする．

$$\begin{cases} Z=0: \quad U=W=0 \\ Z\to\infty: \quad U=\underbrace{\frac{ar_a}{u_a}}_{[4]}R, \quad W=-2\underbrace{\frac{az_a}{w_a}}_{[5]}Z \end{cases} \tag{10}$$

無次元速度は,

$$\left(U,W\right)=f\left(R,Z,\frac{w_a r_a}{z_a u_a},\frac{\nu}{r_a u_a},\frac{\nu r_a}{z_a^{\ 2} u_a},\frac{ar_a}{u_a},\frac{az_a}{w_a}\right) \tag{11}$$

これより，[1]から[5]の各無次元量について，未定参照量を決定していく．

[4] = 1 と置くことにより， $u_a=ar_a$ (12)

[3] = 1 と置くことにより，式(12)を代入し， $z_a=\sqrt{\dfrac{\nu r_a}{u_a}}=\sqrt{\dfrac{\nu}{a}}$ (13)

[1] = 1 と置くことにより，式(12)(13)を代入し， $w_a=\dfrac{z_a u_a}{r_a}=\dfrac{\sqrt{\nu/a}\cdot ar_a}{r_a}=\sqrt{a\nu}$ (14)

[2] は $\dfrac{\nu}{r_a u_a}=\dfrac{\nu}{ar_a^{\ 2}}\equiv\dfrac{1}{Re}$ （後にわかるがここは無関係）

[5] は $\dfrac{az_a}{w_a}=\dfrac{a}{\sqrt{a\nu}}\sqrt{\dfrac{\nu}{a}}=1$

さらに，$R=1$ と置き，相似解を仮定する．つまり，式(7)は次式のように置き換えられる．

$$R=\frac{r}{r_a}=1, \quad Z=\frac{z}{z_a}=z\sqrt{\frac{a}{\nu}}\equiv\eta, \quad U\left(\eta\right)=\frac{u\left(r,z\right)}{ar}, \quad W\left(\eta\right)=\frac{w\left(z\right)}{\sqrt{a\nu}} \tag{15}$$

式(15)を利用して，式(2)の各項を求める．

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(arU\right)=aU+ar\frac{\partial U}{\partial r}=aU+ar\frac{dU}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial r}=aU$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(arU\right)=ar\frac{dU}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}=ar\frac{dU}{d\eta}\sqrt{\frac{a}{\nu}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(aU\right)=a\frac{\partial U}{\partial r}=a\frac{dU}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial r}=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{aU}{r}$$

$$-\frac{u}{r^2} = -\frac{aU}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(ar\frac{dU}{d\eta}\sqrt{\frac{a}{\nu}}\right) = ar\sqrt{\frac{a}{\nu}}\frac{d^2U}{d\eta^2}\sqrt{\frac{a}{\nu}} = \frac{a^2r}{\nu}\frac{d^2U}{d\eta^2}$$

これらを式(2)に代入し，

$$arU\cdot aU + \sqrt{a\nu}W\cdot ar\frac{dU}{d\eta}\sqrt{\frac{a}{\nu}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\frac{a^2r}{\nu}\frac{d^2U}{d\eta^2}$$

整理して次式を得る．

$$\underbrace{U^2 + W\frac{dU}{d\eta} - \frac{d^2U}{d\eta^2}}_{\text{function of } z} = \underbrace{-\frac{1}{\rho a^2 r}\overbrace{\frac{\partial p}{\partial r}}^{f(r)}}_{\text{function of } r} \equiv -P_R \tag{16}$$

式(16)からわかるように，左辺は z の関数であり，右辺は r の関数であるから，結局はそれぞれが定数でなければならない．右辺に示される無次元の半径方向圧力勾配を次式で定義する．

$$P_R \equiv \frac{1}{\rho a^2 r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{f(r)}{\rho a^2 r} = \frac{k_p}{\rho a^2} = \text{const.} \tag{17}$$

ここで，k_p は一定値であり，境界層外のポテンシャル流の状況から決めることができる．

式(17)を r で積分して，次式のように圧力分布が r の関数と z の関数の和として表現されることが示される．

$$\frac{\partial p}{\partial r} = k_p r \quad \Rightarrow \quad p(r,z) = \frac{1}{2}k_p r^2 + p_2(z) \tag{18}$$

では，k_p を求める．ポテンシャル領域における半径方向の運動方程式は次式で与えられる．

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

これに，式(1)および(18)を代入して，

$$ar\cdot a = -\frac{1}{\rho}k_p r \quad \text{つまり} \quad k_p = -\rho a^2 \tag{19}$$

無次元圧力勾配は，式(17)から

$$P_R = \frac{k_p}{\rho a^2} = \frac{-\rho a^2}{\rho a^2} = -1 \tag{20}$$

と求まる．結局，r 方向の運動方程式は

$$U^2 + W\frac{dU}{d\eta} = 1 + \frac{d^2U}{d\eta^2} \tag{21}$$

また連続の式は，即座に以下のように得られる．

$$2U + \frac{dW}{d\eta} = 0 \tag{22}$$

続いて，式(3)の z 方向の運動方程式は，圧力を求めるためだけに使われるが，参考までに示す． $p_2\left(z\right) = \rho a\nu P\left(\eta\right)$ と置けば，

$$W\frac{dW}{d\eta} = -\frac{dP}{d\eta} + \frac{d^2W}{d\eta^2} \tag{23}$$

を得る．最終的に，無次元量の定義は以下の通りである．

$$\begin{aligned} &\eta = z\sqrt{\frac{a}{\nu}}, \quad u\left(r,z\right) = ar\cdot U\left(\eta\right), \quad w\left(z\right) = \sqrt{a\nu}\cdot W\left(\eta\right), \\ &p\left(r,z\right) = -\frac{1}{2}\rho a^2 r^2 + \rho a\nu\cdot P\left(\eta\right) \end{aligned} \tag{24}$$

数式のまとめ

以下の連立常微分方程式を反復法などで解く．

$2U + W' = 0$	W を求める
$-U^2 - WU' + 1 + U'' = 0$	U を求める
$P = -\frac{1}{2}W^2 + W'$	P を求める

B. C.

$$\begin{cases} \eta = 0: & U = W = 0 \\ \eta \to \infty: & U = 1 \end{cases}$$

なお, 式(10)の境界条件において, $\eta \to \infty$: $W = -2\eta$ となるが, 3 階の微分方程式なので, これを 4 つ目の境界条件として与えることはできない. 数値計算により得られた速度成分 W の値は， η が十分に大きくなると， $W \cong -2\eta + 1.139$ であるので，式(22)をふまえると，排除厚さは以下のようになる．

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{ar}\right)dz = \sqrt{\frac{\nu}{a}}\int_0^\infty \left(1 - U\right)d\eta = \sqrt{\frac{\nu}{a}}\left[\eta + \frac{W}{2}\right]_0^\infty = 0.569\sqrt{\frac{\nu}{a}} \tag{25}$$

$\eta = 1.95$ で 99%の境界層厚さに達する．壁面の速度勾配 U'は 1.3119 であった．

解析結果

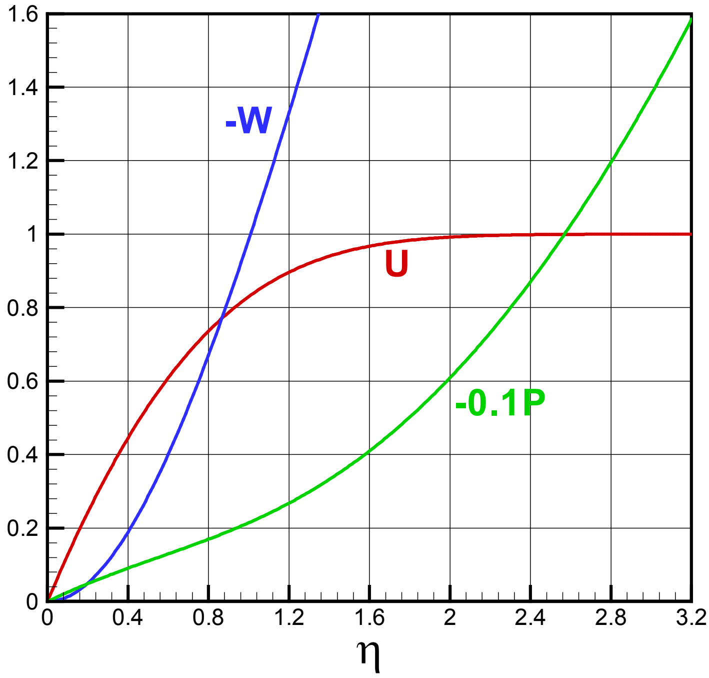

図１　軸対称澱み点流れの計算結果（W と P は負号を付けて表示）

表１　数値解

η	U	W	P
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.500000	0.531606	-0.286413	-0.110415
1.000000	0.829873	-0.984810	-0.214462
1.500000	0.955225	-1.888190	-0.369305
2.000000	0.991894	-2.866047	-0.609089
2.500000	0.999026	-3.862567	-0.945776
3.000000	0.999924	-4.862203	-1.382036
3.500000	0.999996	-5.862178	-1.918256
4.000000	1.000000	-6.862177	-2.554474
4.500000	1.000000	-7.862177	-3.290692
5.000000	1.000000	-8.862177	-4.126909