Biot-Savart の式について

半径 a の円形コイルがつくる磁場分布をビオ・サヴァールの法則により計算する場合について，デカルト座標系 $\mathrm{O}-xyz$ と円筒座標系 $\mathrm{O}-r\theta z$ のそれぞれで考える．円形コイルの中心位置をデカルト座標系および円筒座標系の原点に取るものとする．ビオ・サヴァールの法則は，次式のようにベクトル式で与えられる．

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_C \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\times d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \tag{1}$$

ここで，位置ベクトル $\vec{r}$ は磁場を求めようとする点である．一方で，位置ベクトル $\vec{r}\,'$ はコイル上の電流素片の場所を表す．なお，$d\vec{l}$ はコイル上の電流素片の方向ベクトルを表す．

＜デカルト座標系＞

ここでは，デカルト座標系の基本ベクトルを $\vec{e}_x$，$\vec{e}_y$，$\vec{e}_z$ とする．

まず，磁場を求めたい座標 P 点 (x,y,z) の位置ベクトル $\vec{r}$ は，$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ と表示できる．一方，コイル上の電流素片の位置ベクトル $\vec{r}\,'$ は，$\vec{r}\,' = (a\cos\theta)\vec{e}_x + (a\sin\theta)\vec{e}_y$ と書け，電流素片ベクトル $d\vec{l}$ は，$d\vec{l} = (-a\sin\theta\,d\theta)\vec{e}_x + (a\cos\theta\,d\theta)\vec{e}_y$ と書ける．各部分を計算すると，

$$\vec{r}-\vec{r}\,' = (x-a\cos\theta)\vec{e}_x + (y-a\sin\theta)\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3 = \left[x^2+y^2+z^2-2a(x\cos\theta+y\sin\theta)+a^2\right]^{3/2}$$

$$\begin{aligned}(\vec{r}-\vec{r}\,')\times d\vec{l} &= \left[(x-a\cos\theta)\vec{e}_x + (y-a\sin\theta)\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right]\times\left[(-a\sin\theta\,d\theta)\vec{e}_x + (a\cos\theta\,d\theta)\vec{e}_y\right] \\ &= (-za\cos\theta\,d\theta)\vec{e}_x + (-za\sin\theta\,d\theta)\vec{e}_y + \left[(xa\cos\theta + ya\sin\theta - a^2)\,d\theta\right]\vec{e}_z\end{aligned}$$

これらを式(1)に代入すると，各成分の表示を行えば，

$$\begin{aligned}B_x(x,y,z) &= \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_0^{2\pi}\frac{za\cos\theta}{\left[x^2+y^2+z^2-2a(x\cos\theta+y\sin\theta)+a^2\right]^{3/2}}d\theta \\ B_y(x,y,z) &= \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_0^{2\pi}\frac{za\sin\theta}{\left[x^2+y^2+z^2-2a(x\cos\theta+y\sin\theta)+a^2\right]^{3/2}}d\theta \\ B_z(x,y,z) &= \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-a(x\cos\theta+y\sin\theta)}{\left[x^2+y^2+z^2-2a(x\cos\theta+y\sin\theta)+a^2\right]^{3/2}}d\theta\end{aligned} \tag{2}$$

この積分は，一般には数値積分する必要がある．

以下は特殊な場合についての考察である．点 P がコイルの中心軸上$(0,0,z)$であれば，式(2)から，以下のように解析的に解を求めることができる．

$$B_x = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_0^{2\pi}\frac{za\cos\theta\, d\theta}{\left(z^2+a^2\right)^{3/2}} = 0, \qquad B_y = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_0^{2\pi}\frac{za\sin\theta\, d\theta}{\left(z^2+a^2\right)^{3/2}} = 0$$
$$B_z = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_0^{2\pi}\frac{a^2 d\theta}{\left(z^2+a^2\right)^{3/2}} = \frac{I}{2\varepsilon_0 c^2}\frac{a^2}{\left(z^2+a^2\right)^{3/2}} \tag{3}$$

まとめて，ベクトルで書けば

$$\vec{B}(z) = \frac{I}{2\varepsilon_0 c^2}\frac{a^2}{\left(z^2+a^2\right)^{3/2}}\vec{e}_z \tag{4}$$

となる．中心軸上での磁場はz成分のみであり，その値はzに依存する．

今度は，軸対称性を考慮して，P 点の座標を媒介変数ϕを用いて表してみる．

磁場を求めたい座標 P 点$(x,y,z)=(r\cos\phi, r\sin\phi, z)$の位置ベクトル$\vec{r}$は，
$\vec{r}=(r\cos\phi)\vec{e}_x+(r\sin\phi)\vec{e}_y+z\vec{e}_z$と表示できる．一方，コイル上の電流素片の位置ベクトル$\vec{r}\,'$は，
$\vec{r}\,'=(a\cos\theta)\vec{e}_x+(a\sin\theta)\vec{e}_y$と書け，電流素片ベクトル$d\vec{l}$は，$d\vec{l}=(-a\sin\theta\, d\theta)\vec{e}_x+(a\cos\theta\, d\theta)\vec{e}_y$と書ける．各部分を計算すると，

$$\vec{r}-\vec{r}\,' = (r\cos\phi - a\cos\theta)\vec{e}_x + (r\sin\phi - a\sin\theta)\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3 = \left[r^2+z^2-2ar\cos(\theta-\phi)+a^2\right]^{3/2}$$

$$\begin{aligned}
&(\vec{r}-\vec{r}\,')\times d\vec{l} \\
&\quad = \left[(r\cos\phi - a\cos\theta)\vec{e}_x + (r\sin\phi - a\sin\theta)\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right]\times\left[(-a\sin\theta\, d\theta)\vec{e}_x + (a\cos\theta\, d\theta)\vec{e}_y\right] \\
&\quad = (r\cos\phi - a\cos\theta)\vec{e}_x\times(a\cos\theta\, d\theta)\vec{e}_y + (r\sin\phi - a\sin\theta)\vec{e}_y\times(-a\sin\theta\, d\theta)\vec{e}_x \\
&\qquad + z\vec{e}_z\times(-a\sin\theta\, d\theta)\vec{e}_x + z\vec{e}_z\times(a\cos\theta\, d\theta)\vec{e}_y \\
&\quad = -az\cos\theta\, d\theta\vec{e}_x - az\sin\theta\, d\theta\vec{e}_y + \left(ar\cos(\theta-\phi)-a^2\right)d\theta\vec{e}_z
\end{aligned}$$

これらを式(1)に代入すると，

$$\vec{B}(r,\phi,z)=\frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_0^{2\pi}\frac{az\cos\theta\,\vec{e}_x+az\sin\theta\,\vec{e}_y-\left(ar\cos(\theta-\phi)-a^2\right)\vec{e}_z}{\left[r^2+z^2-2ar\cos(\theta-\phi)+a^2\right]^{3/2}}d\theta \tag{5}$$

各成分の表示を行えば,

$$\begin{aligned}
B_x(r,\phi,z)&=\frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_0^{2\pi}\frac{az\cos\theta}{\left[r^2+z^2-2ar\cos(\theta-\phi)+a^2\right]^{3/2}}d\theta\\
B_y(r,\phi,z)&=\frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_0^{2\pi}\frac{az\sin\theta}{\left[r^2+z^2-2ar\cos(\theta-\phi)+a^2\right]^{3/2}}d\theta\\
B_z(r,\phi,z)&=\frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-ar\cos(\theta-\phi)}{\left[r^2+z^2-2ar\cos(\theta-\phi)+a^2\right]^{3/2}}d\theta
\end{aligned} \tag{6}$$

点 P における磁場は,対称性より B_ϕ 成分はゼロになる.実際,式(6)の上の二つの式を用いて,計算すると

$$\begin{aligned}
B_r(r,\phi,z)&=B_x\cos\phi+B_y\sin\phi=\frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_0^{2\pi}\frac{az\cos(\theta-\phi)}{\left[r^2+z^2-2ar\cos(\theta-\phi)+a^2\right]^{3/2}}d\theta\\
B_\phi(r,\phi,z)&=-B_x\sin\phi+B_y\cos\phi=\frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_0^{2\pi}\frac{az\sin(\theta-\phi)}{\left[r^2+z^2-2ar\cos(\theta-\phi)+a^2\right]^{3/2}}d\theta=0
\end{aligned} \tag{7}$$

式(7)は,磁場は ϕ に依存しないことを示している.結局,以下のようにまとめられる.

$$\begin{aligned}
B_r(r,z)&=\frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_0^{2\pi}\frac{az\cos\theta}{\left(r^2+z^2-2ar\cos\theta+a^2\right)^{3/2}}d\theta\\
B_z(r,z)&=\frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_0^{2\pi}\frac{a(a-r\cos\theta)}{\left(r^2+z^2-2ar\cos\theta+a^2\right)^{3/2}}d\theta
\end{aligned} \tag{8}$$

＜円筒座標系＞

ここでは,円筒座標系の基本ベクトルを $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$ とする.

まず,任意の座標 P 点の位置ベクトル $\vec{r}$ は,$\vec{r}=r\vec{e}_r+z\vec{e}_z$ と表示できる.一方,コイル上の電流素片の位置ベクトル $\vec{r}\,'$ は,$\vec{r}\,'=a\vec{e}_r\,'$ と書け,電流素片ベクトル $d\vec{l}$ は,$d\vec{l}=ad\theta'\vec{e}_\theta\,'$ と書ける.

各部分を計算すると,

$$\vec{r}-\vec{r}\,'=r\vec{e}_r+z\vec{e}_z-a\vec{e}_r\,'$$

$$\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3=\left(r^2+z^2+a^2-2ar\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r\,'\right)^{3/2}$$

$$\begin{aligned}&\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)\times d\vec{l}=\left(r\vec{e}_r+z\vec{e}_z-a\vec{e}_r\,'\right)\times\left(ad\theta'\,\vec{e}_\theta\,'\right)\\&\quad=ard\theta'\left(\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta\,'\right)+azd\theta'\left(\vec{e}_z\times\vec{e}_\theta\,'\right)-a^2d\theta'\left(\vec{e}_r\,'\times\vec{e}_\theta\,'\right)=\left[ar\left(\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta\,'\right)-az\vec{e}_r\,'-a^2\,\vec{e}_z\right]d\theta'\end{aligned}$$

これらを式(1)に代入すると,

$$\vec{B}=\frac{I}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int_0^{2\pi}\frac{-ar\left(\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta\,'\right)+az\vec{e}_r\,'+a^2\,\vec{e}_z}{\left(r^2+z^2+a^2-2ar\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r\,'\right)^{3/2}}d\theta' \tag{9}$$

この式の中には，基本ベクトルの内積や外積を含むので，P 点上の基本ベクトル（'無し）とコイル上の基本ベクトル（'有り）をそれぞれ以下のように置くと,

$$\begin{aligned}&\vec{e}_r=\vec{e}_x\cos\phi+\vec{e}_y\sin\phi,\quad \vec{e}_\theta=-\vec{e}_x\sin\phi+\vec{e}_y\cos\phi\\&\vec{e}_r\,'=\vec{e}_x\cos\theta'+\vec{e}_y\sin\theta',\quad \vec{e}_\theta\,'=-\vec{e}_x\sin\theta'+\vec{e}_y\cos\theta'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r\,'=\cos\left(\theta'-\phi\right)\\&\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta\,'=\left(\vec{e}_x\cos\phi+\vec{e}_y\sin\phi\right)\times\left(-\vec{e}_x\sin\theta'+\vec{e}_y\cos\theta'\right)=\vec{e}_x\cos\phi\times\vec{e}_y\cos\theta'-\vec{e}_y\sin\phi\times\vec{e}_x\sin\theta'\\&\quad=\vec{e}_x\times\vec{e}_y\left(\cos\phi\cos\theta'+\sin\phi\sin\theta'\right)=\vec{e}_z\cos\left(\theta'-\phi\right)\end{aligned}$$

したがって,

$$\vec{B}\left(r,\phi,z\right)=\frac{I}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int_0^{2\pi}\frac{az\cos\theta'\vec{e}_x+az\sin\theta'\vec{e}_y+a\left[a-r\cos\left(\theta'-\phi\right)\right]\vec{e}_z}{\left[r^2+z^2+a^2-2ar\cos\left(\theta'-\phi\right)\right]^{3/2}}d\theta' \tag{10}$$

この式は式(5)に同じであることがわかる．このように円筒座標系で考えることもできるが，多少面倒であった．結局，有用なのは式(8)である．

最後に，式(9)を利用して，中心軸上の磁場がどう与えられるかを考える．

$$\vec{B}\left(z\right)=\underbrace{\frac{I}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int_0^{2\pi}\frac{az\vec{e}_r\,'}{\left(z^2+a^2\right)^{3/2}}d\theta'}_{0}+\frac{I}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int_0^{2\pi}\frac{a^2\,\vec{e}_z}{\left(z^2+a^2\right)^{3/2}}d\theta'=\frac{I}{2\varepsilon_0c^2}\frac{a^2}{\left(z^2+a^2\right)^{3/2}}\vec{e}_z$$

第一項目は，基本ベクトル$\vec{e}_r\,'$がθ'に依存することに注意．コイルを一周積分するとゼロになる．

この結果は，式(4)に一致する．