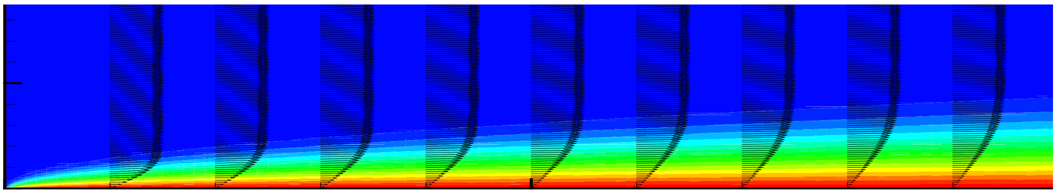
平板境界層流れ

本稿では，非圧縮性流れを仮定した境界層運動方程式の解の一例として Blasius の境界層流れを考える．下図に示されるように，壁面に対して平行な一様外部流がある．



壁面から十分に離れた領域（ポテンシャル領域）では，一様流と見なされ，x 方向の速度成分 u は次式で与えられる．

$$u_p = u_\infty = \text{const.} \tag{1}$$

二次元デカルト座標系の境界層方程式は，

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

と与えられる．ポテンシャル領域では，運動方程式は次式で与えられる．

$$u_p\frac{\partial u_p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_p}{\partial x} \tag{5}$$

式(1)を考慮すると，左辺の慣性項はゼロであるので，右辺の圧力勾配項もゼロとなる．さらに式(4)を考慮して，式(3)の運動方程式は以下のように書き換えられる．

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{6}$$

次に，式(6)を無次元化するにあたり，以下のように無次元変数を置く．

$$X = \frac{x}{x_a},\quad Y = \frac{y}{y_a},\quad U = \frac{u}{u_a},\quad V = \frac{v}{v_a} \tag{7}$$

大文字は無次元変数を示し，右辺の下付添え字 a が付くものが未定参照量を示す．式(7)を式(6)に代入すると，

$$\frac{{u_a}^2}{x_a}U\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{v_a u_a}{y_a}V\frac{\partial U}{\partial Y}=\nu\frac{u_a}{{y_a}^2}\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial X}+\underbrace{\frac{v_a x_a}{y_a u_a}}_{[1]}V\frac{\partial U}{\partial Y}=\underbrace{\frac{\nu x_a}{{y_a}^2 u_a}}_{[2]}\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \tag{8}$$

境界条件

$$\begin{cases} y=0: \quad u=v=0 \\ y\to\infty: \quad u=u_\infty \end{cases} \tag{9}$$

についても無次元化をする．

$$\begin{cases} Y=0: \quad U=V=0 \\ Y\to\infty: \quad U=\underbrace{u_\infty/u_a}_{[3]} \end{cases} \tag{10}$$

無次元速度は，以下の無次元量に依存する．

$$\left(U,V\right)=f\left(X,Y,\underbrace{\frac{v_a x_a}{y_a u_a}}_{[1]},\underbrace{\frac{\nu x_a}{{y_a}^2 u_a}}_{[2]},\underbrace{\frac{u_\infty}{u_a}}_{[3]}\right) \tag{11}$$

これより，[1]から[3]の各無次元量について，未定参照量を決定していく．

[3] = 1 と置くことにより， $u_a=u_\infty$ (12)

[2] = 1 と置くことにより，式(12)を代入し，

$$y_a=\sqrt{\frac{\nu x_a}{u_a}}=\sqrt{\frac{\nu x_a}{u_\infty}} \tag{13}$$

[1] = 1 と置くことにより，式(12)(13)を代入し，

$$v_a=\frac{y_a u_a}{x_a}=\frac{\sqrt{\frac{\nu x_a}{u_\infty}}\cdot u_\infty}{x_a}=\sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x_a}} \tag{14}$$

さらに，X = 1 と置き，相似解を仮定する．つまり，式(11)からわかるように，無次元速度はηのみに依存し，式(7)は次式のように置き換えられる．

$$\eta=Y=\frac{y}{y_a}=y\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}},\quad U\left(\eta\right)=\frac{u}{u_a}=\frac{u\left(x,y\right)}{u_\infty},\quad V\left(\eta\right)=\frac{v}{v_a}=\frac{v\left(x,y\right)}{\sqrt{\nu u_\infty/x}} \tag{15}$$

式(15)を利用して，式(6)の各項を求める．

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \right) = -\frac{y}{2x}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_\infty U \right) = u_\infty \frac{dU}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{2x}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}u_\infty \frac{dU}{d\eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(u_\infty U \right) = u_\infty \frac{dU}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\frac{dU}{d\eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\frac{dU}{d\eta} \right) = u_\infty \frac{u_\infty}{\nu x}\frac{d^2U}{d\eta^2}$$

参考までに，境界層近似で落とされている項について，展開すると，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{u_\infty y}{2}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-\frac{3}{2}}\frac{dU}{d\eta} \right) = -\frac{u_\infty y}{2}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}}\left[-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\frac{dU}{d\eta} + x^{-\frac{3}{2}}\frac{d^2U}{d\eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} \right]$$

$$= -\frac{u_\infty y}{4}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}}\left[-3x^{-\frac{5}{2}}\frac{dU}{d\eta} - y\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}}x^{-3}\frac{d^2U}{d\eta^2} \right] = -\frac{u_\infty y}{4}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}x^{-2}\left[-3\frac{dU}{d\eta} - \eta\frac{d^2U}{d\eta^2} \right]$$

$$= \frac{u_\infty}{4x^2}\eta\left(3\frac{dU}{d\eta} + \eta\frac{d^2U}{d\eta^2} \right)$$

これらを式(6)に代入し，

$$u_\infty U \cdot \left[-\frac{y}{2x}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}u_\infty \frac{dU}{d\eta} \right] + \sqrt{\nu u_\infty / x}\, V \cdot u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\frac{dU}{d\eta} = \nu u_\infty \frac{u_\infty}{\nu x}\frac{d^2U}{d\eta^2} + \nu \frac{u_\infty}{4x^2}\eta\left(3\frac{dU}{d\eta} + \eta\frac{d^2U}{d\eta^2} \right)$$

整理すると

$$-\frac{1}{2}\eta U\frac{dU}{d\eta} + V\frac{dU}{d\eta} = \frac{d^2U}{d\eta^2} + \underbrace{\frac{1}{4Re_x}\left(3\eta\frac{dU}{d\eta} + \eta^2\frac{d^2U}{d\eta^2} \right)}_{\text{negligible for large Reynolds number}}, \quad Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$$

結局，次式を得る．

$$-\frac{1}{2}\eta U\frac{dU}{d\eta} + V\frac{dU}{d\eta} - \frac{d^2U}{d\eta^2} = 0 \tag{16}$$

また，連続の式の各項は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{2x}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}u_\infty \frac{dU}{d\eta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u_\infty}{x}\frac{dV}{d\eta}$$

であるから，式(2)に代入し整理すると次式となる．

$$-\frac{1}{2}\eta\frac{dU}{d\eta}+\frac{dV}{d\eta}=0 \tag{17}$$

数式のまとめ

以下に示される連立常微分方程式の境界値問題を反復法で，または初期値問題に置き換えてルンゲクッタ法などにより数値的に解けば良い．

$$-\frac{1}{2}\eta UU'+VU'-U''=0 \tag{18}$$

$$-\frac{1}{2}\eta U'+V'=0 \tag{19}$$

$$\begin{cases}\eta=0: \quad U=V=0\\ \eta\to\infty: \quad U=1\end{cases} \tag{20}$$

参考

本稿では流れ関数 f を用いないで考察したが，多くのテキストに記載ある場合との比較のために，以下簡単に言及する．

まず，次式のように，無次元速度は無次元流れ関数の導関数である．

$$U=f' \tag{21}$$

次に式(19)を積分し，壁面上で $f=0$ とすると，次式が得られる．

$$V=\frac{1}{2}\eta U-\int\frac{1}{2}Ud\eta=\frac{1}{2}\left(\eta f'-f\right) \tag{22}$$

式(21), (22)を式(18)に代入すると，運動方程式は次式のように与えられる．

$$2f'''+ff''=0 \tag{23}$$

境界条件は，

$$\begin{cases}\eta=0: \quad f=f'=0\\ \eta\to\infty: \quad f'=1\end{cases} \tag{24}$$

と与えられる．

解析結果

良く知られているように，図１のような数値計算結果を得る．表１には数値解を示す．

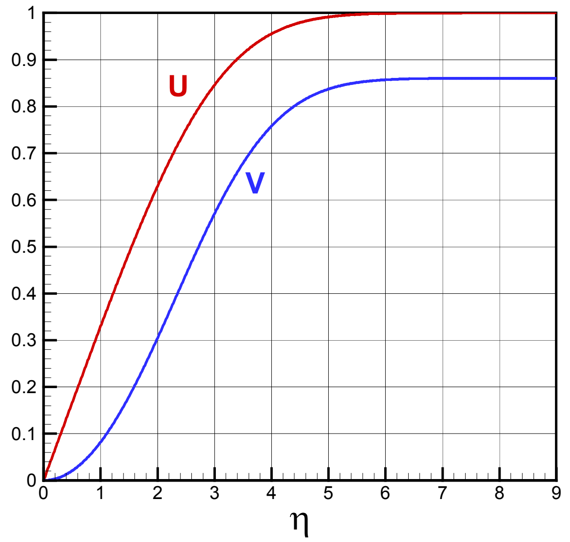


図１　無次元の速度分布

表１　Blasius 方程式の数値解

η	f	$f'=U$	$f''=U'$	V
0.00000	0.00000	0.00000	0.33206	0.00000
0.40000	0.02656	0.13276	0.33147	0.01327
0.80000	0.10611	0.26471	0.32739	0.05283
1.20000	0.23795	0.39378	0.31659	0.11729
1.60000	0.42032	0.51676	0.29666	0.20324
2.00000	0.65003	0.62977	0.26675	0.30475
2.40000	0.92230	0.72898	0.22809	0.41363
2.80000	1.23098	0.81151	0.18401	0.52062
3.20000	1.56910	0.87608	0.13913	0.61718
3.60000	1.92953	0.92333	0.09809	0.69722
4.00000	2.30575	0.95552	0.06423	0.75816
4.40000	2.69237	0.97587	0.03897	0.80073
4.80000	3.08533	0.98779	0.02187	0.82803
5.20000	3.48187	0.99425	0.01134	0.84410
5.60000	3.88030	0.99748	0.00543	0.85278
6.00000	4.27963	0.99897	0.00240	0.85710
6.40000	4.67936	0.99961	0.00098	0.85907
6.80000	5.07927	0.99986	0.00037	0.85990
7.20000	5.47923	0.99996	0.00013	0.86022
7.60000	5.87922	0.99999	0.00004	0.86033
8.00000	6.27922	1.00000	0.00001	0.86037
8.40000	6.67922	1.00000	0.00000	0.86038
8.80000	7.07922	1.00000	0.00000	0.86038
9.20000	7.47922	1.00000	0.00000	0.86038

境界層の諸量

1）境界層厚さ：粘性の影響が及ぶ範囲である境界層の厚さは，はっきりしている訳ではない．そこで層外の速度の 99%になる点までの物体表面からの距離 δ を境界層厚さとすることが多い．

$$\delta = 4.92\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \tag{25}$$

2）排除厚さ：境界層の中では速度が遅くなっているため，流れが外側に押しやられたと考えられる．

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \int_0^\infty \left(1 - U\right) d\eta = 1.72\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \tag{26}$$

3）運動量厚さ：境界層の中では速度が遅くなっているために発生する運動量損失を表す．

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{u_\infty}\left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \int_0^\infty U\left(1 - U\right) d\eta = 0.664\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \tag{27}$$

4）壁面剪断応力

$$\tau_w = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \cdot U'\left(\eta = 0\right) = 0.332\mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} = \frac{0.332\rho {u_\infty}^2}{\sqrt{Re_x}} \tag{28}$$

5）摩擦抵抗

$$D = \int_0^\ell \tau_w dx = \int_0^\ell 0.332\mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} dx = 0.332\mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} \int_0^\ell x^{-1/2} dx = 0.664\mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty \ell}{\nu}} \tag{29}$$

6）摩擦抵抗係数

$$C_f = \frac{D}{0.5\rho {u_\infty}^2 \ell} = \frac{0.664\mu u_\infty \sqrt{u_\infty \ell/\nu}}{0.5\rho {u_\infty}^2 \ell} = 1.328\sqrt{\frac{\nu}{u_\infty \ell}} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_\ell}} \tag{30}$$

7）境界層の外側における y 方向の速度成分

$$v_\infty = 0.8604\sqrt{\frac{u_\infty \nu}{x}} = \frac{0.8604 u_\infty}{\sqrt{Re_x}} \tag{31}$$