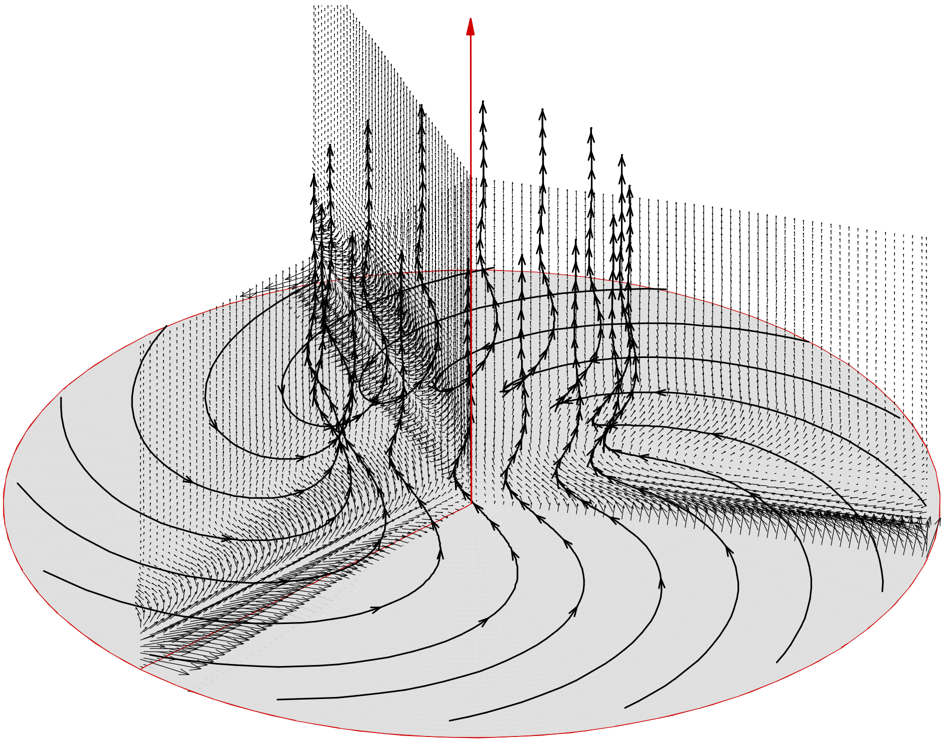
一様回転流中における静止円板近傍の流れ

本稿では，非圧縮性流れを仮定した Navier-Stokes 方程式の厳密解の一例として，一定角速度 ω の回転流中に置かれた静止円板近傍の流れを考える．下図は流れの速度ベクトルと流線を示す．



静止円板の壁面から十分に離れた領域では，粘性の影響はなく，剛体回転と円板から離れる一様な軸方向の流れが重畳すると見なされる．今，u, v, w はそれぞれ，半径方向，周方向，軸方向の速度成分とする．軸対称流れを仮定した円筒座標系の Navier-Stokes の運動方程式は，以下のように与えられる．

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial r}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{v^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial r}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{uv}{r}=\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{3}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{4}$$

円板半径が無限であり相似解を仮定するとき，境界層の内外の領域において$\partial w/\partial r=0$が成り立つ．式(4)を r で微分し，それを適用すると

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r\partial z}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)=0 \tag{5}$$

この式の意味するところは，半径方向の圧力勾配が軸方向に変化しないということである．つまり，

$$\frac{\partial p(r,z)}{\partial r}=f(r) \tag{6}$$

となる．次に，式(1), (2), (3), (4)を無次元化するにあたり，以下のように無次元変数を置く．

$$R=\frac{r}{r_a},\quad Z=\frac{z}{z_a},\quad U=\frac{u}{u_a},\quad V=\frac{v}{v_a},\quad W=\frac{w}{w_a} \tag{7}$$

大文字は無次元変数を示し，右辺の下付添え字 a が付くものが未定参照量を示す．式(7)を式(2)に代入し整理すると，

$$U\frac{\partial U}{\partial R}+\underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]}W\frac{\partial U}{\partial Z}-\underbrace{\frac{{v_a}^2}{{u_a}^2}}_{[4]}\frac{V^2}{R}=-\frac{r_a}{\rho {u_a}^2}\frac{\partial p}{\partial r}+\underbrace{\frac{\nu}{r_a u_a}}_{[2]}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial R}-\frac{U}{R^2}\right)+\underbrace{\frac{\nu r_a}{{z_a}^2 u_a}}_{[3]}\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \tag{8}$$

周方向の運動方程式も同様に，

$$U\frac{\partial V}{\partial R}+\underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]}W\frac{\partial V}{\partial Z}+\frac{UV}{R}=\underbrace{\frac{\nu}{r_a u_a}}_{[2]}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial R}-\frac{V}{R^2}\right)+\underbrace{\frac{\nu r_a}{{z_a}^2 u_a}}_{[3]}\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}$$

境界条件

$$\begin{cases} z=0: \quad u=v=w=0 \\ z\to\infty: \quad u=0,\quad v=\omega r \end{cases} \tag{9}$$

についても無次元化をする．

$$\begin{cases} Z=0: \quad U=V=W=0 \\ Z\to\infty: \quad U=0,\quad V=\underbrace{\frac{\omega r_a}{v_a}}_{[5]}R \end{cases} \tag{10}$$

無次元速度は，以下の無次元量に依存することがわかる．

$$(U,W)=f\left(R, Z, \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]}, \underbrace{\frac{\nu}{r_a u_a}}_{[2]}, \underbrace{\frac{\nu r_a}{{z_a}^2 u_a}}_{[3]}, \underbrace{\frac{{v_a}^2}{{u_a}^2}}_{[4]}, \underbrace{\frac{\omega r_a}{v_a}}_{[5]}\right) \tag{11}$$

これより，[1]から[5]の各無次元量について，未定参照量を決定していく．

[5] = 1, [4] = 1 と置くことにより， $u_a = v_a = \omega r_a$ (12)

[3] = 1 と置くことにより，式(12)を代入し， $z_a = \sqrt{\dfrac{\nu r_a}{u_a}} = \sqrt{\dfrac{\nu}{\omega}}$ (13)

[1] = 1 と置くことにより，式(12)(13)を代入し， $w_a = \dfrac{z_a u_a}{r_a} = \dfrac{\sqrt{\nu/\omega}\cdot\omega r_a}{r_a} = \sqrt{\omega\nu}$ (14)

[2] は $\dfrac{\nu}{r_a u_a} = \dfrac{\nu}{\omega r_a{}^2} \equiv \dfrac{1}{Re_\omega}$ （後にわかるがここは無関係）

ここまでは, r_a を定数として考えて扱ってきたが, さらに $R = 1$ と置き, 相似解を仮定する．

つまり，式(7)は次式のように置き換えられる．

$$Z = \frac{z}{z_a} = z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \equiv \eta,\quad U(\eta) = \frac{u(r,z)}{\omega r},\quad V(\eta) = \frac{v(r,z)}{\omega r},\quad W(\eta) = \frac{w(z)}{\sqrt{\omega\nu}} \tag{15}$$

式(15)を利用して，式(2)の各項を求める．

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(\omega r U) = \omega\left(U + r\frac{\partial U}{\partial r}\right) = \omega\left(U + r\frac{dU}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial r}\right) = \omega U$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\omega r U) = \omega r\frac{dU}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} = \omega r\frac{dU}{d\eta}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}(\omega U) = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{\omega U}{r} - \frac{\omega U}{r} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\omega r\frac{dU}{d\eta}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right) = \omega r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\frac{d^2U}{d\eta^2}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = \frac{\omega^2 r}{\nu}\frac{d^2U}{d\eta^2}$$

$$-\frac{v^2}{r} = -\frac{(\omega r V)^2}{r} = -\omega^2 r V^2$$

これらを式(2)に代入し,

$$\omega r U\cdot\omega U + \sqrt{\omega\nu}W\cdot\omega r\frac{dU}{d\eta}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} - \omega^2 r V^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\frac{\omega^2 r}{\nu}\frac{d^2U}{d\eta^2}$$

整理して次式を得る．

$$\underbrace{U^2 + W\frac{dU}{d\eta} - V^2 - \frac{d^2U}{d\eta^2}}_{\text{function of } z} = \underbrace{-\frac{1}{\rho\omega^2 r}\overbrace{\frac{\partial p}{\partial r}}^{f(r)}}_{\text{function of } r} \equiv -P_R \tag{16}$$

式(16)からわかるように，左辺は z の関数であり，右辺は r の関数であるから，結局はそれぞれが定数でなければならない．右辺に示される無次元の半径方向圧力勾配を次式で定義する．

$$P_R \equiv \frac{1}{\rho\omega^2 r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{f(r)}{\rho\omega^2 r} = \frac{k_p}{\rho\omega^2} = \text{const.} \tag{17}$$

ここで，k_p は一定値であり，境界層外のポテンシャル流の状況から決めることができる．

式(17)を r で積分して，次式のように圧力分布が r の関数と z の関数の和として表現されることが示される．

$$\frac{\partial p}{\partial r} = k_p r \quad \Rightarrow \quad p(r,z) = \frac{1}{2}k_p r^2 + p_2(z) \tag{18}$$

では，k_p を求める．ポテンシャル領域では $u=0,\quad v=\omega r$ であるので，オイラーの運動方程式（半径方向）は次式で与えられる．

$$\cancel{u}\frac{\partial u}{\partial r} + w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} - \frac{(\omega r)^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r$$

これより

$$k_p = \rho\omega^2 \tag{19}$$

無次元圧力勾配は, 式(17)から $P_R = 1$ となり, 結局, 半径方向および周方向の運動方程式は, 次式のようになる．

$$U^2 + W\frac{dU}{d\eta} - V^2 = -1 + \frac{d^2U}{d\eta^2} \tag{20}$$

$$2UV + W\frac{dV}{d\eta} = \frac{d^2V}{d\eta^2} \tag{21}$$

また連続の式は，即座に以下のように得られる．

$$2U + \frac{dW}{d\eta} = 0 \tag{22}$$

続いて，式(4)の軸方向の運動方程式は，後にわかるが，圧力を求めるためだけに使われるので，あまり重要ではないが，参考までに示す．$p_2(z) = \rho\omega\nu P(\eta)$ と置けば,

$$W\frac{dW}{d\eta} = -\frac{dP}{d\eta} + \frac{d^2W}{d\eta^2} \tag{23}$$

を得る．最終的に，無次元量の定義は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
&\eta = z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}, \quad u(r,z) = \omega r \cdot U(\eta), \quad v(r,z) = \omega r \cdot V(\eta), \\
&w(z) = \sqrt{\omega\nu} \cdot W(\eta), \quad p(r,z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho\omega\nu \cdot P(\eta)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

数式のまとめ

以下の連立常微分方程式を反復法などで解く.

$2U + W' = 0$　　W を求める

$-U^2 - WU' + V^2 - 1 + U'' = 0$　　U を求める

$-2UV - WV' + V'' = 0$　　V を求める

$P = -\frac{1}{2}W^2 + W'$　　P を求める

$$
\begin{cases}
\eta = 0: \quad U = V = W = 0 \\
\eta \to \infty: \quad U = 0, \quad V = 1
\end{cases}
$$

図１に数値計算結果を示す．壁面の速度勾配は，それぞれ $U' = 0.942$, $V' = 0.773$ であった．図２は，円板近傍の流れの可視化の様子である．表１に数値解を示す．

解析結果

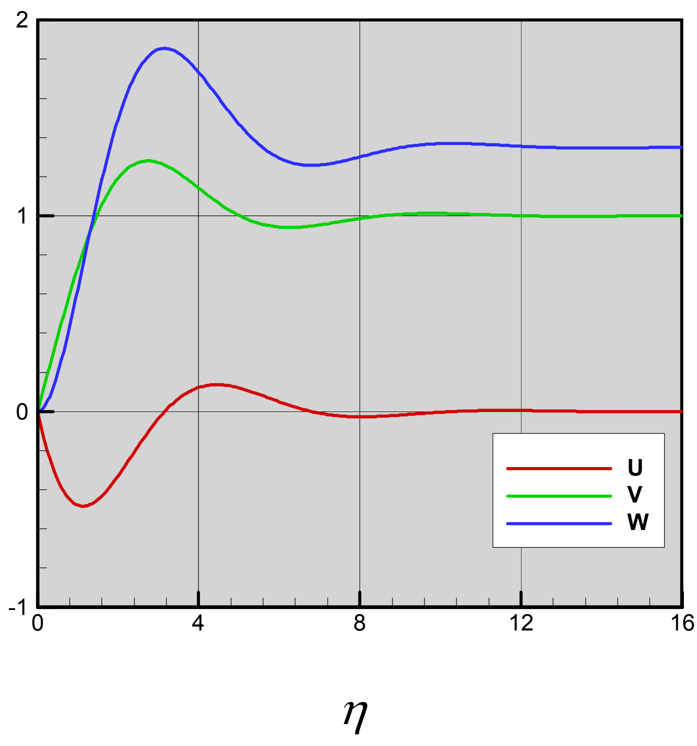


図１　静止円板近傍の流れの計算結果

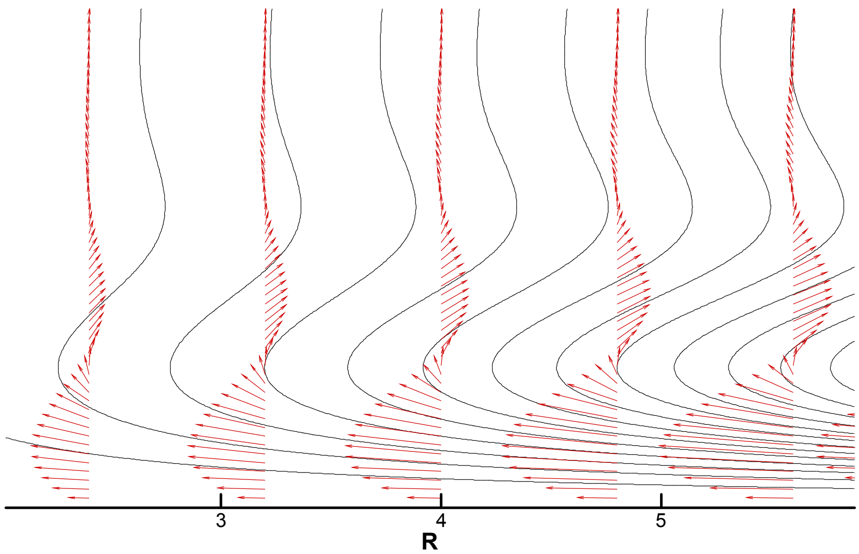


図２　静止円板近傍の流れの様子

（黒は Stokes 流線，赤は子午面の速度分布）

表１　数値解

η	U	V	W	P
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1.00000	-0.47877	0.73536	0.62423	0.76227
2.00000	-0.32877	1.19227	1.49315	-0.45731
3.00000	-0.03617	1.27132	1.85000	-1.63883
4.00000	0.12255	1.14128	1.73303	-1.74669
5.00000	0.12093	1.00169	1.46916	-1.32104
6.00000	0.04994	0.94275	1.29507	-0.93848
7.00000	-0.00834	0.95304	1.25955	-0.77657
8.00000	-0.02674	0.98569	1.30095	-0.79277
9.00000	-0.01787	1.00776	1.34819	-0.87307
10.00000	-0.00330	1.01211	1.36888	-0.93032