## Boussinesq 近似

鉛直加熱平板の自然対流に用いられる運動方程式の導出過程を示す. 鉛直方向に$x$軸, 水平方向に$y$軸をとる．二次元デカルト座標系における重力項を含んだ境界層運動方程式は

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\rho g \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0 \tag{2}$$

と書ける．$u$は鉛直方向の速度成分を表す．密度$\rho$は，左辺の慣性項と右辺の重力項のそれぞれにあり，一般には温度と圧力の関数である．しかし，それでは厳密に捉えすぎているため解析が難しくなる. そこで, 慣性項にかかる密度については一定値$\rho_\infty$（加熱平板から十分に遠い場所における密度）とみなす一方で，重力項にかかる密度については温度のみの関数として扱う．これを Boussinesq 近似という．$T_\infty$を加熱平板から十分に遠い場所における温度として，密度についてのテイラー展開を考える．

$$\underbrace{\rho(T)}_{\rho}=\underbrace{\rho(T_\infty)}_{\rho_\infty}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_\infty(T-T_\infty)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial T^2}\right)_\infty(T-T_\infty)^2+\cdots \tag{3}$$

ここで，体膨張係数の定義　$\beta\equiv-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial T}$　を使い，右辺第三項以上を無視すると，上式は近似的に

$$\rho-\rho_\infty\cong\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_\infty(T-T_\infty)=-\rho_\infty\beta_\infty(T-T_\infty) \tag{4}$$

と表される. 一方, 平板から十分に遠ざかった場所においては, 鉛直方向速度成分$u=0$であるので，式(1)において，重力と圧力勾配がつりあう.

$$-\frac{\partial p_\infty}{\partial x}-\rho_\infty g=0 \tag{5}$$

ところが，式(2)より

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial p_\infty}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial x} \tag{6}$$

であるので，これを考慮し，式(1)の圧力項を消去すると次式を得る.

$$\rho_\infty\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-(\rho-\rho_\infty)g$$

式(4)を考慮し，この両辺を$\rho_\infty$で割ると，最終的に次式が得られる.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+g\beta(T-T_\infty) \tag{7}$$

ただし，$\nu=\mu/\rho_\infty$である．また$\beta_\infty$は$\beta$と表記した.