境界面付近における差分近似の高精度化について

スタッガード格子を用いて流体解析をする場合に，境界条件をどう与えるかについて考える．図１は，境界面近傍でのスタッガード格子を表したもので，法線方向速度成分については壁面上で定義されるので何も問題がないが，接線方向速度成分については壁面から半格子離れた点において定義されるために滑り無し条件を満足させるには多少の工夫を要する．

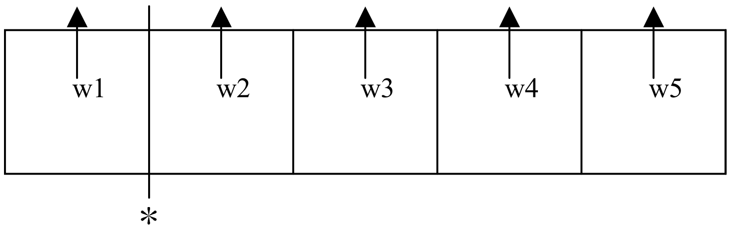

図１

＊は壁面位置を表す．格子間隔を Δx として，テイラー展開を考えると，

$$w_1 = w_* + \frac{1}{1!}\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_* \left(\frac{-\Delta x}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_* \left(\frac{-\Delta x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_* \left(\frac{-\Delta x}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left.\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right|_* \left(\frac{-\Delta x}{2}\right)^4 + \cdots$$

$$w_2 = w_* + \frac{1}{1!}\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_* \left(\frac{\Delta x}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_* \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_* \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left.\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right|_* \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^4 + \cdots$$

$$w_3 = w_* + \frac{1}{1!}\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_* \left(\frac{3\Delta x}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_* \left(\frac{3\Delta x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_* \left(\frac{3\Delta x}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left.\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right|_* \left(\frac{3\Delta x}{2}\right)^4 + \cdots$$

$$w_4 = w_* + \frac{1}{1!}\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_* \left(\frac{5\Delta x}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_* \left(\frac{5\Delta x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_* \left(\frac{5\Delta x}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left.\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right|_* \left(\frac{5\Delta x}{2}\right)^4 + \cdots$$

$$w_5 = w_* + \frac{1}{1!}\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_* \left(\frac{7\Delta x}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_* \left(\frac{7\Delta x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_* \left(\frac{7\Delta x}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left.\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right|_* \left(\frac{7\Delta x}{2}\right)^4 + \cdots$$

５階微分以上の項を無視し，これらの式を行列を使って書けば，以下のように表される．

$$
\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{48} & \frac{1}{384} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{48} & \frac{1}{384} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{8} & \frac{27}{48} & \frac{81}{384} \\ 1 & \frac{5}{2} & \frac{25}{8} & \frac{125}{48} & \frac{625}{384} \\ 1 & \frac{7}{2} & \frac{49}{8} & \frac{7^3}{48} & \frac{7^4}{384} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_* \\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_* (\Delta x) \\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_* (\Delta x)^2 \\ \left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_* (\Delta x)^3 \\ \left.\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right|_* (\Delta x)^4 \end{pmatrix} \tag{1}
$$

両辺に<u>逆行列</u>を左から作用させれば，以下のようになる．

$$
\begin{pmatrix} w_* \\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_* (\Delta x) \\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_* (\Delta x)^2 \\ \left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_* (\Delta x)^3 \\ \left.\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right|_* (\Delta x)^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{128} & \frac{35}{32} & -\frac{35}{64} & \frac{7}{32} & -\frac{5}{128} \\ -\frac{11}{12} & \frac{17}{24} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{43}{24} & -\frac{14}{3} & \frac{17}{4} & -\frac{5}{3} & \frac{7}{24} \\ -2 & 7 & -9 & 5 & -1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} \tag{2}
$$

これより，例えば，壁面上における一階微分は，

$$
\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_* (\Delta x) = -\frac{11}{12} w_1 + \frac{17}{24} w_2 + \frac{3}{8} w_3 - \frac{5}{24} w_4 + \frac{1}{24} w_5
$$

となり，これを整理して，

$$
\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_* = \frac{-22w_1 + 17w_2 + 9w_3 - 5w_4 + w_5}{24(\Delta x)} \tag{3}
$$

と与えられる．滑り条件であれば，左辺はゼロと考えられるので，仮想格子点における速度は以下のように与えると良いだろう．

$$
w_1 = \frac{17w_2 + 9w_3 - 5w_4 + w_5}{22} \tag{4}
$$

一方，滑りなし条件のときは，

$$
w_* = \frac{35}{128} w_1 + \frac{35}{32} w_2 - \frac{35}{64} w_3 + \frac{7}{32} w_4 - \frac{5}{128} w_5 \tag{5}
$$

であるから，左辺をゼロとして，

$$w_1 = \frac{-140w_2 + 70w_3 - 28w_4 + 5w_5}{35} \tag{6}$$

となる．

次に，MAC 法系の数値解法において，速度の発散をスカラ点で求める必要がある．境界面から２格子以上離れた点においては，中心差分法で四次精度の差分近似が可能であるが，境界面近傍においては，中心差分法で近似する場合は二次精度にならざるを得ない．ここでは境界面近傍で精度の高い差分近似を考える．

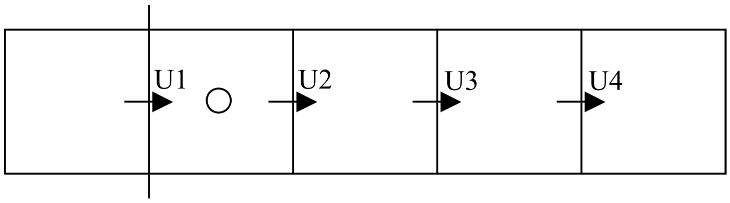

図２

図２のように，法線方向速度成分 U1 と U2 の中点におけるスカラ点（図中の丸印）において，速度の発散（一次元で，一階微分）を考える．丸印まわりでテイラー展開（４階微分以上の項を無視した場合）すると，以下のように書ける．

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{48} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{48} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{8} & \frac{27}{48} \\ 1 & \frac{5}{2} & \frac{25}{8} & \frac{125}{48} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_* \\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_* (\Delta x) \\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_* (\Delta x)^2 \\ \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_* (\Delta x)^3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

逆行列を左から掛けると，

$$\begin{pmatrix} u_* \\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_* (\Delta x) \\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_* (\Delta x)^2 \\ \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_* (\Delta x)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{15}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{23}{24} & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{24} \\ \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \tag{8}$$

これより，１階微分は，

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{*}(\Delta x)=-\frac{23}{24}u_1+\frac{7}{8}u_2+\frac{1}{8}u_3-\frac{1}{24}u_4 \tag{9}$$

これを整理して，

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{*}=\frac{-23u_1+21u_2+3u_3-u_4}{24(\Delta x)} \tag{10}$$

高次精度の差分計算をする場合，壁面近傍においては，上式の利用を推奨する．