

$$\begin{cases} y=0: & u=v=0 \\ y \rightarrow \infty: & u=ax^m \end{cases} \quad (9)$$

についても無次元化をする.

$$\begin{cases} Y=0: & U=V=0 \\ Y \rightarrow \infty: & U = \frac{ax_a^m}{\underbrace{u_a}_{[3]}} X^m \end{cases} \quad (10)$$

無次元速度は,

$$(U, V) = f \left(X, Y, \underbrace{\frac{v_a x_a}{y_a u_a}}_{[1]}, \underbrace{\frac{v x_a}{y_a^2 u_a}}_{[2]}, \underbrace{\frac{ax_a^m}{u_a}}_{[3]} \right) \quad (11)$$

これより, [1]から[3]の各無次元量について, 未定参照量を決定していく.

$$[3]=1 \text{ と置くことにより, } u_a = ax_a^m \quad (12)$$

[2]=1 と置くことにより, 式(12)を代入し,

$$y_a = \sqrt{\frac{v x_a}{u_a}} = \sqrt{\frac{v x_a}{ax_a^m}} = \sqrt{\frac{v}{ax_a^{m-1}}} \quad (13)$$

[1]=1 と置くことにより, 式(12)(13)を代入し,

$$v_a = \frac{y_a u_a}{x_a} = \frac{\sqrt{\frac{v}{ax_a^{m-1}}} \cdot ax_a^m}{x_a} = \sqrt{\frac{v}{ax_a^{m-1}}} \cdot ax_a^{m-1} = \sqrt{avx_a^{m-1}} \quad (14)$$

さらに, $X=1$ と置き, 相似解を仮定する. つまり, 式(11)からわかるように, 無次元速度は η のみに依存し, 式(7)は次式のように置き換えられる.

$$\begin{aligned} \eta = Y = y \sqrt{\frac{ax^{m-1}}{v}} = y \sqrt{\frac{u_\infty}{vx}}, \quad U(\eta) = \frac{u(x, y)}{ax^m} = \frac{u(x, y)}{u_\infty}, \\ V(\eta) = \frac{v(x, y)}{\sqrt{avx^{m-1}}} = \frac{v(x, y)}{\sqrt{vu_\infty/x}} \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)を利用して, 式(2)の各項を求める.

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \sqrt{\frac{ax^{m-1}}{v}} \right) = \frac{m-1}{2} \sqrt{\frac{a}{v}} y x^{\frac{m-3}{2}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(ax^m U) = amx^{m-1}U + ax^m \frac{dU}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = amx^{m-1}U + ax^m \frac{dU}{d\eta} \frac{m-1}{2} \sqrt{\frac{a}{\nu}} yx^{\frac{m-3}{2}} \\ &= ax^{m-1} \left(mU + \frac{dU}{d\eta} \frac{m-1}{2} \sqrt{\frac{a}{\nu}} yx^{\frac{m-1}{2}} \right)\end{aligned}$$

ちなみに、 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ について求めると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[(m-1)^2 \eta^2 \frac{d^2 U}{d\eta^2} + \left\{ 2m(m-1) + 3(m-1)^2 \right\} \eta \frac{dU}{d\eta} + 4m(m-1)U \right] \frac{ax^{m-2}}{4}$$

と得られる。 $m=0$ と 1 を代入すると、

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{m=0} &= \frac{a}{4x^2} \left(\eta^2 \frac{d^2 U}{d\eta^2} + 3\eta \frac{dU}{d\eta} \right) \quad (\text{Blasius flow}) \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{m=1} &= 0 \quad (\text{Stagnation point flow})\end{aligned}$$

したがって、 $m=0$ (Blasius 流れ) の時は、境界層近似されていることになるが、 $m=1$ (淀み点流れ) では、Navier-Stokes 方程式を厳密に解いていることになり近似は入っていない。

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(ax^m U) = ax^m \frac{dU}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = ax^m \sqrt{\frac{ax^{m-1}}{\nu}} \frac{dU}{d\eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(ax^m \sqrt{\frac{ax^{m-1}}{\nu}} \frac{dU}{d\eta} \right) = ax^m \sqrt{\frac{ax^{m-1}}{\nu}} \frac{d^2 U}{d\eta^2} \sqrt{\frac{ax^{m-1}}{\nu}} = ax^m \frac{ax^{m-1}}{\nu} \frac{d^2 U}{d\eta^2}$$

これらを式(2)に代入し、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned}ax^m U \cdot ax^{m-1} \left(mU + \frac{dU}{d\eta} \frac{m-1}{2} \sqrt{\frac{a}{\nu}} yx^{\frac{m-1}{2}} \right) \\ + \sqrt{ax^{m-1} \nu} \cdot ax^m \sqrt{\frac{ax^{m-1}}{\nu}} \frac{dU}{d\eta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu ax^m \frac{ax^{m-1}}{\nu} \frac{d^2 U}{d\eta^2}\end{aligned}$$

$$a^2 x^{2m-1} U \left(mU + \frac{dU}{d\eta} \frac{m-1}{2} \sqrt{\frac{a}{\nu}} yx^{\frac{m-1}{2}} \right) + a^2 x^{2m-1} \nu \frac{dU}{d\eta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + a^2 x^{2m-1} \frac{d^2 U}{d\eta^2}$$

$$mU^2 + \frac{m-1}{2}\eta U \frac{dU}{d\eta} + V \frac{dU}{d\eta} = -\frac{1}{\rho a^2 x^{2m-1}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{d^2 U}{d\eta^2}$$

整理して次式を得る.

$$\underbrace{mU^2 + \frac{m-1}{2}\eta U \frac{dU}{d\eta} + V \frac{dU}{d\eta}}_{\text{function of } \eta} - \frac{d^2 U}{d\eta^2} = -\underbrace{\frac{1}{\rho a^2 x^{2m-1}} \frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{function of } x} \equiv -P_X \quad (16)$$

これからわかるように、左辺は η の関数であり、右辺は x の関数であるから、結局はそれぞれが定数でなければならない。右辺に示される無次元の X 方向圧力勾配を次式で定義する。

$$P_X \equiv \frac{1}{\rho a^2 x^{2m-1}} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{f(x)}{\rho a^2 x^{2m-1}} = \frac{k_p}{\rho a^2} = \text{const.} \quad (17)$$

ここで、 k_p は一定値であり、境界層外のポテンシャル流の状況から決めることができる。

式(17)を x で積分して、次式のように圧力分布が x の関数と y の関数の和として表現されることが示される。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = k_p x^{2m-1} \Rightarrow p(x, y) = \frac{1}{2m} k_p x^{2m} + p_2(y), \quad (\text{for } m \neq 0) \quad (18)$$

では、 k_p を求める。ポテンシャル領域では、運動方程式は次式で与えられる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

これに、式(1)および(18)を代入して、

$$ax^m \cdot max^{m-1} = -\frac{1}{\rho} k_p x^{2m-1}$$

$$k_p = -m\rho a^2 \quad (\text{for } m \neq 0 \ \& \ m = 0) \quad (19)$$

無次元圧力勾配は、式(17)から

$$P_X = \frac{k_p}{\rho a^2} = \frac{-m\rho a^2}{\rho a^2} = -m \quad (20)$$

と求まる。結局、 x 方向の運動方程式は

$$mU^2 + \frac{m-1}{2}\eta U \frac{dU}{d\eta} + V \frac{dU}{d\eta} = m + \frac{d^2 U}{d\eta^2} \quad (21)$$

また連続の式は、まず各項を求めて、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ax^{m-1} \left(mU + \frac{dU}{d\eta} \frac{m-1}{2} \sqrt{\frac{a}{\nu}} y x^{\frac{m-1}{2}} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{avx^{m-1}} V \right) = \sqrt{avx^{m-1}} \frac{dV}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{avx^{m-1}} \frac{dV}{d\eta} \sqrt{\frac{ax^{m-1}}{v}} = ax^{m-1} \frac{dV}{d\eta}$$

式(4)に代入して

$$ax^{m-1} \left(mU + \frac{dU}{d\eta} \frac{m-1}{2} \sqrt{\frac{a}{v}} yx^{\frac{m-1}{2}} \right) + ax^{m-1} \frac{dV}{d\eta} = 0$$

整理すると

$$mU + \frac{m-1}{2} \eta \frac{dU}{d\eta} + \frac{dV}{d\eta} = 0 \quad (22)$$

最終的に、無次元量の定義は以下の通りである。

$$\eta = y \sqrt{\frac{ax^{m-1}}{v}}, \quad U(\eta) = \frac{u(x,y)}{ax^m}, \quad V(\eta) = \frac{v(x,y)}{\sqrt{avx^{m-1}}} \quad (23)$$

数式のまとめ

以下の連立常微分方程式をヤコビの反復法を用いて解いた。 $m < 0$ の剥離に近い状況では、収束に時間を要した。

$$-mU^2 - \frac{m-1}{2} \eta UU' - VU' + m + U'' = 0 \quad (U \text{ を求める}) \quad (24)$$

$$mU + \frac{m-1}{2} \eta U' + V' = 0 \quad (V \text{ を求める}) \quad (25)$$

$$\begin{cases} \eta = 0: & U = V = 0 \\ \eta \rightarrow \infty: & U = 1 \end{cases} \quad (26)$$

式(25)を部分積分により積分すると、

$$V = -\frac{m+1}{2} f - \frac{m-1}{2} \eta f' \quad (\because f' = U) \quad (27)$$

であるので、式(24)は次式のようにも変形できる。

$$f''' + \frac{m+1}{2} ff'' + m(1-f^2) = 0 \quad (28)$$

$m = 0$ のとき Blasius 流になり、 $m = 1$ のとき 澱み点流れとなる。 $m = -0.0904$ より小さくなると、剥離するので計算できなくなる。ここで、 m と β の間に、以下の関係式がなりたつ。

$$m = \frac{\beta}{2-\beta}; \quad \beta = \frac{2m}{m+1} \quad (29)$$

表 1 に種々のくさび角度に対する m と β をまとめる。図 1, 2 には結果を示す。

表1 まとめ

m	β	角度	備考
4	1.6	144°	
1	1	90°	Stagnation point flow
1/3	0.5	45°	
1/9	0.2	18°	
0	0	0°	Blasius flow
-0.0654	-0.14	-12.6°	
-0.0904	-0.199	-17.9°	Separation

解析結果

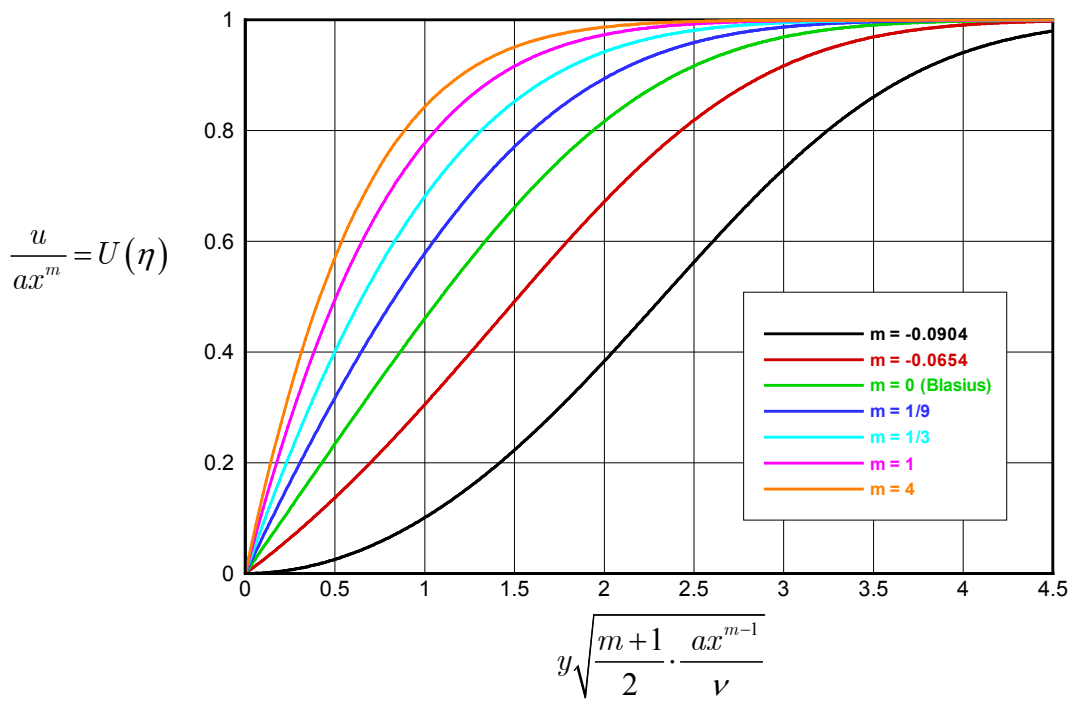


図1 外部流 $u = ax^m$ に対する速度分布

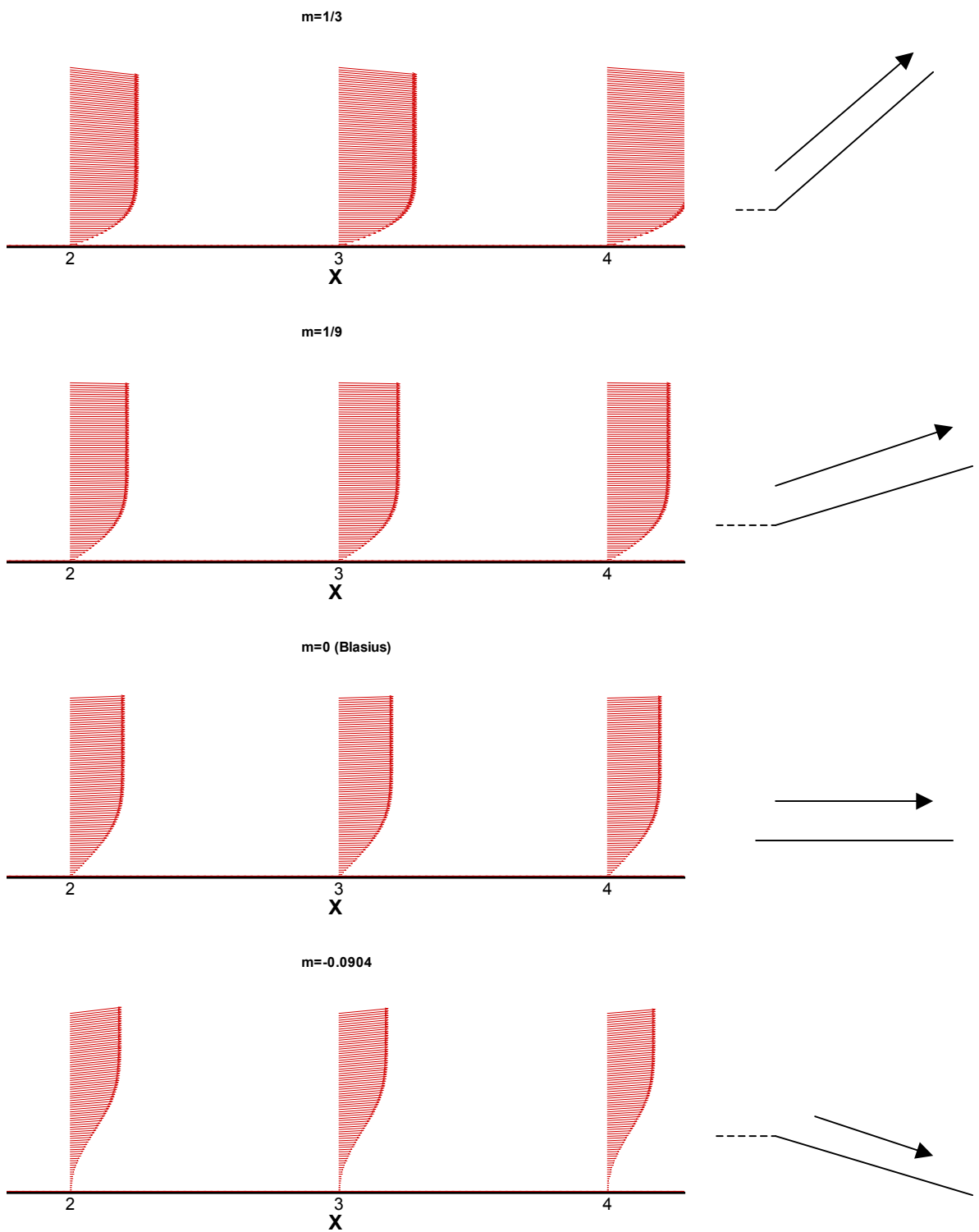


図2 種々の m 値に対する境界層流れの様子（上から、 45° 、 18° 、 0° 、 -17.9° ）