

強制対流熱伝達の基礎

図1のように、速度 u_∞ 、温度 T_∞ の一様流中に、温度 T_w の半無限平板が流れに平行に置かれている場合を考える。このとき、2次元のデカルト座標系において、境界層近似された各方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

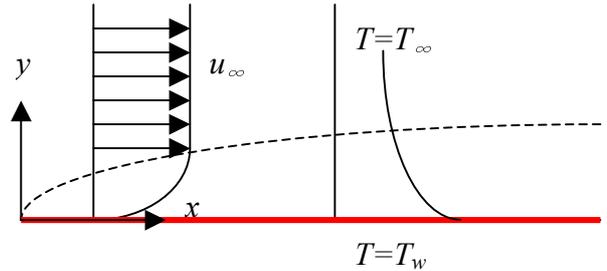


図1 半無限平板の強制対流熱伝達

となる。式(1)は連続の式である。式(2)は運動方程式であり、温度場とは独立に得られるものとしている。一般に対流伝熱には自然対流効果も含まれるが、強制対流熱伝達では、これを無視して取り扱う。実際、式(2)には浮力項は含まれない。

式(3)をエネルギー方程式というが、ここでは応力のする仕事を無視し、非圧縮流れを仮定していることに注意。 α は温度伝導率（または熱拡散率）を示し、動粘性係数 ν と同じ次元を持つ。これらを解いて、速度場と同時に温度場が得られれば、壁面における熱伝達率を求めることができる。境界条件は次式で与えられる。

$$\begin{cases} y=0: & u=v=0, \quad T=T_w \\ y \rightarrow \infty: & u=u_\infty, \quad T=T_\infty \end{cases} \quad (4)$$

式(1)を恒等的に満足させるために流れ関数 ψ を導入する。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5)$$

式(5)を式(2)に代入すれば、次式を得る。

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (6)$$

無次元の流れ関数、相似変数、レイノルズ数をそれぞれ以下のように定義する。

$$f = \frac{\psi}{\sqrt{\nu u_\infty x}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x / u_\infty}} = \frac{y}{x} \sqrt{Re_x}, \quad Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} \quad (7)$$

ここで、 x は平板前縁から平板に沿う方向の長さである。相似変換の結果、式(6)は下記の常微分方程式となる。

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (8)$$

また、境界条件は、

$$\begin{cases} \eta = 0: & f = f' = 0 \\ \eta \rightarrow \infty: & f' = 1 \end{cases} \quad (9)$$

となる．式(8), 式(9)で表される境界層を Blasius 境界層という．表 1 にその数値解を示す．

表 1 Blasius 方程式の数値解

η	f	f'	f''
0.00000	0.00000	0.00000	0.33206
0.50000	0.04149	0.16589	0.33091
1.00000	0.16558	0.32978	0.32301
1.50000	0.37014	0.48679	0.30258
2.00000	0.65003	0.62977	0.26675
2.50000	0.99632	0.75126	0.21741
3.00000	1.39682	0.84604	0.16136
3.50000	1.83771	0.91304	0.10777
4.00000	2.30576	0.95552	0.06423
5.00000	3.28328	0.99154	0.01591
6.00000	4.27963	0.99897	0.00240
7.00000	5.27924	0.99992	0.00022
8.00000	6.27922	0.99999	0.00001
9.00000	7.27922	1.00000	0.00000
10.00000	8.27921	1.00000	0.00000

さて，残りのエネルギー方程式も無次元化を行う必要がある．そこで，無次元温度 θ を次式のように置く．

$$\theta = \frac{T - T_b}{T_a - T_b}, \quad Y = \frac{y}{y_a}, \quad X = \frac{x}{x_a}, \quad \Psi = \frac{\psi}{\psi_a} \quad (10)$$

温度の未定参照量は 2 つ (T_a, T_b) ある．流れ関数を使って表現すれば，式(3)は

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (11)$$

となるが，式(10)を代入し整理すると，

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\alpha x_a}{y_a \psi_a} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}$$

ここで，運動方程式の無次元化の際に， $(\nu x_a)/(y_a \psi_a) = 1$ であったので，結局，エネルギー方程式として

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (12)$$

を得る．ここで， Pr はプラントル(Prandtl) 数という無次元数であり，次式で定義される．

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu/\rho}{k/(\rho c_p)} = \frac{c_p \mu}{k} \quad (13)$$

ここで、 k は熱伝導率、 ρ は密度、 μ は粘性係数、 c_p は比熱である。一方で、境界条件の式(4)も無次元化する。温度だけ抜き出し整理すると、次式となる。無次元温度は、壁面で1、遠方で0と置いても良いが、ここでは、Pohlhausen に倣って下記のように置く。

$$\begin{cases} Y=0: & \theta = \underbrace{(T_w - T_b)/T_a}_{0\text{と置く}} \\ Y \rightarrow \infty: & \theta = \underbrace{(T_\infty - T_b)/T_a}_{1\text{と置く}} \end{cases}$$

したがって、温度の境界条件は

$$\begin{cases} Y=0: & \theta = 0 \\ Y \rightarrow \infty: & \theta = 1 \end{cases} \quad (14)$$

式(10)で、未定参照量が決まったので、無次元温度は次式のようになる。

$$\theta = \frac{T - T_b}{T_a - T_b} = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} \quad (15)$$

式(12)を解いても良いが二次元計算になり時間が長くなる。そこで、式(8)を得るのと同様に、相似解を仮定し、式(11)の常微分化を試みる。結局、次式を得ることができる。

$$\theta'' + \frac{Pr}{2} f \theta' = 0 \quad (16)$$

これでエネルギー方程式も常微分化された。

差分法による計算

仮想時間項を導入すると、たとえ非線形方程式であっても比較的簡便に解ける。結局、次の方程式を解くことになる。 f の微分値は速度であったので、それを U と置き、次式のようになる。

<運動方程式>

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} f \frac{\partial U}{\partial \eta} \quad (17)$$

<エネルギー式>

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{Pr}{2} f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad (18)$$

<流れ関数と速度の関係式>

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = U \quad (19)$$

<境界条件>

$$\begin{cases} \eta=0: & f = U = \theta = 0 \\ \eta \rightarrow \infty: & U = \theta = 1 \end{cases} \quad (20)$$

一例として、式(17), (18)における時間項は前進差分で、その他は2次精度の中心差分

で離散化し、陽解法を用いると、次のように書ける。

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta \tau} = \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{(\Delta \eta)^2} + \frac{1}{2} f_i^n \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta \eta} \quad (21)$$

$$\frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta \tau} = \frac{\theta_{i+1}^n - 2\theta_i^n + \theta_{i-1}^n}{(\Delta \eta)^2} + \frac{Pr}{2} f_i^n \frac{\theta_{i+1}^n - \theta_{i-1}^n}{2\Delta \eta} \quad (22)$$

流れ関数は速度を空間積分することにより、次式から求めれば良い。ただし、 U_* は点 i と点 $i-1$ の中点における補間値である。

$$\frac{f_i^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{\Delta \eta} = U_*^{n+1} \quad (23)$$

境界条件における無限大 (∞) は、温度境界層が速度境界層よりも薄ければ（つまり Pr 数が 1 より大きい流体では）、Blasius 層で行ったように、10 くらいに設定すれば十分である。格子点番号は、1 から N までとすると以下のように書ける。

$$\begin{cases} \eta = 0: & f_1 = U_1 = \theta_1 = 0 \\ \eta = 10: & U_N = \theta_N = 1 \end{cases} \quad (\text{for } Pr \geq 1) \quad (24)$$

もし、液体金属のような低 Pr 数流体のとき（温度境界層が速度境界層よりもずっと厚い場合）には、 $\eta = \infty$ の数値設定（10 以上とする）を試行錯誤的に与える必要がある。以上の方程式を時間進行させて繰り返し計算を行い、仮想時間項がゼロになったと見なせる時、式(8)と式(16)の解となる。

熱伝達率の計算

温度分布が求まれば、熱移動速度（伝熱速度、熱伝達量ともいう） q は、フーリエの法則 (Fourier's law) により、次式から求められる。

$$q = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = k(T_w - T_\infty) \left. \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} = k(T_w - T_\infty) \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \cdot \theta' \Big|_{\eta=0} \quad (25)$$

対流熱伝達の大きさを表す熱移動係数（伝熱係数、熱伝達率ともいう） h は、次式で定義される。

$$q = h(T_w - T_\infty) \quad (26)$$

また無次元の熱移動速度を表す Nu 数（ヌセルト数）は次式で定義される。

$$Nu_x = \frac{hx}{k} = \frac{\overbrace{h(T_w - T_\infty)}^q}{k(T_w - T_\infty)} = \frac{x \overbrace{k(T_w - T_\infty) \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \theta' \Big|_{\eta=0}}^q}{k(T_w - T_\infty)} = x \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \cdot \theta' \Big|_{\eta=0} = \sqrt{Re_x} \cdot \theta' \Big|_{\eta=0} \quad (27)$$

したがって、 Nu 数は無次元の壁面温度勾配（これは数値計算により求まる）に Re_x

の 0.5 乗を掛ければ良いことがわかる。そして、 Nu 数は Pr 数の関数である。 Pr 数は物質固有の値を持つ物性値である。その概略値は温度にも依存するが、水銀 0.02, 空気 0.7, 水 5-7, 各種油 100-1000 の程度である。図 2 に各 Pr 数に対する温度分布（数値計算結果）を示す。 $Pr = 1$ では速度分布と温度分布は同じになる。低 Pr 数では温度境界層が厚いのが見て取れる。なお、 Pr が 0 または ∞ の極限については、付録を参照。

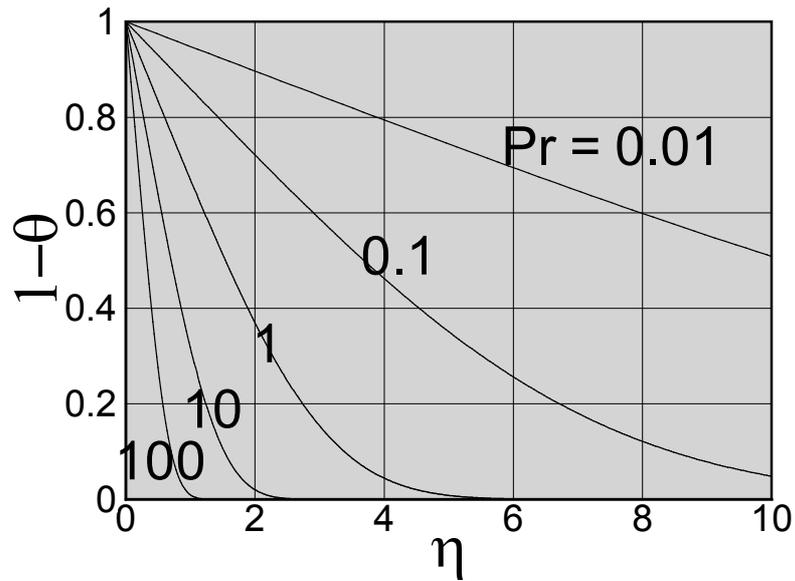


図 2 等温加熱平板近くの温度分布

付録

解析には、非圧縮の連続の式、境界層近似された運動方程式およびエネルギー方程式を用いる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

無次元の流れ関数 f および無次元の温度 θ 導入し、相似変換した式は、

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + \frac{Pr}{2} f \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad (5)$$

● $Pr \rightarrow 0$ の場合

$Pr \rightarrow 0$ のとき、速度境界層は温度境界層に比べてずっと薄く、温度境界層の中で流れ場は一様（境界で滑っている）と考えて良いだろう。したがって(4)は、次式で近似できる。

$$f = \eta \quad (6)$$

となる。この結果を(5)に代入すると

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + \frac{Pr}{2} \eta \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad (7)$$

を得る。この方程式が Rayleigh の流れの方程式に似ていることから、次の変換を行う。

$$\frac{\sqrt{Pr}}{2} \eta = \zeta \quad (8)$$

その結果、Rayleigh 流れの方程式と相似な

$$\frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} + 2\zeta \frac{d\theta}{d\zeta} = 0 \quad (9)$$

を得る。与えられた境界条件

$$\begin{cases} \theta = 0 & \text{at } \eta = 0 \quad (\zeta = 0) \\ \theta \rightarrow 1 & \text{as } \eta \rightarrow \infty \quad (\zeta \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (10)$$

のもと、この方程式の解は、

$$\theta = \text{erf}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta \exp(-\xi^2) d\xi \quad (11)$$

となるので、温度勾配は η で微分して、

$$\frac{d\theta}{d\eta} = \frac{d\theta}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\zeta^2) \frac{\sqrt{Pr}}{2} \quad (12)$$

壁における温度勾配は、

$$\left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\zeta=0} = \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{\pi}} \quad (13)$$

と得られる。結局、局所 Nu 数は、

$$Nu_x = \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} \cdot \sqrt{Re_x} = \sqrt{\frac{Pr}{\pi}} \sqrt{Re_x} = 0.5642 \sqrt{Pr Re_x} = 0.5642 \sqrt{Pe_x} \quad (14)$$

ここで、 Pe_x はペクレ数と呼ばれる。理論的に求まるのでこれで良いが、差分法で式(9)を数値的に計算すると、図3を得る。壁面での勾配は、1.1284であった。

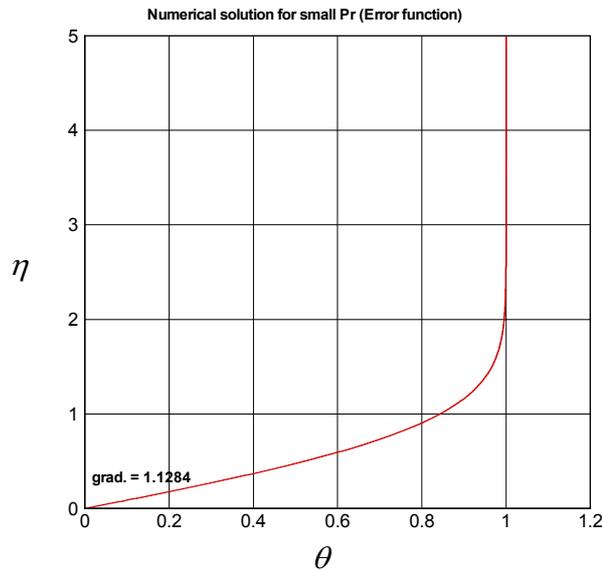


図3

$$1.1284 = \left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_{wall} = \left(\frac{d\theta}{d\eta} \frac{d\eta}{d\zeta} \right)_{wall} = \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} 2Pr^{-1/2}$$

Nu の定義は、 $Nu_x = \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} \sqrt{Re_x}$ であるから、

$$Nu_x = \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} \sqrt{Re_x} = 0.5642 \sqrt{Pr} \sqrt{Re_x} \quad (\text{for } Pr \rightarrow 0) \quad (14')$$

これは(14)に等しい。 $Pr \rightarrow 0$ では理論解析でも数値解析でも求まる。

追記：元の相似変換式と(8)式を同時に考慮すれば、

$$\zeta = \frac{\sqrt{Pr}}{2} \eta = \frac{\sqrt{Pr}}{2} y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} = \frac{y \sqrt{u_\infty x Pr}}{2x \sqrt{\nu}} = \frac{y}{2x} \sqrt{Pe_x} \quad (15)$$

となる。

● $Pr \rightarrow \infty$ の場合

$Pr \rightarrow \infty$ のとき，速度境界層は温度境界層に比べてずっと厚く，温度境界層の中で流れ場の速度勾配は一樣と考えて良いだろう。したがって，無次元流れ関数は

$$f' = 0.33206\eta, \quad f = \frac{0.33206}{2} \eta^2 \quad (16)$$

と置ける。これを(5)に代入して，

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{Pr}{2} \frac{0.33206}{2} \eta^2 \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad (17)$$

を得る。ここで，次のような変換を行う。

$$Pr^{1/3} \eta = \zeta \quad (18)$$

そうすると， Pr に依存しない次式を得る。

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} + \frac{0.33206}{4} \zeta^2 \frac{d\theta}{d\zeta} = 0 \quad (19)$$

この方程式を差分法により，式(10)の境界条件のもと，計算を行うと図4を得る。

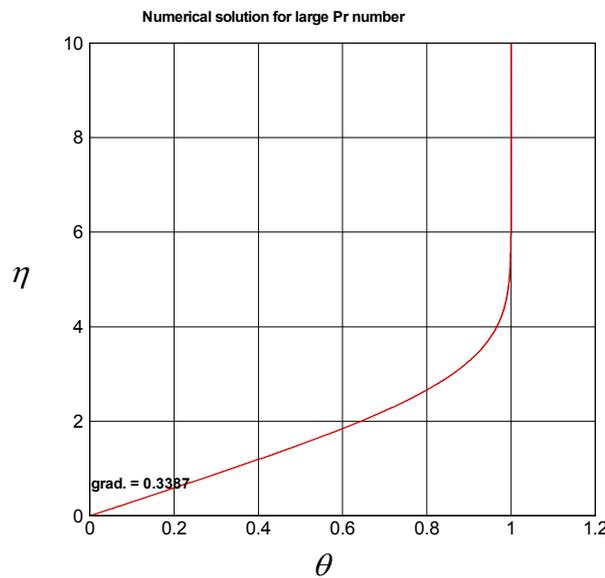


図4

このグラフの壁面における勾配値は0.3387になった。

$$0.3387 = \left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_{wall} = \left(\frac{d\theta}{d\eta} \frac{d\eta}{d\zeta} \right)_{wall} = \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} Pr^{-1/3} \quad (20)$$

Nu の定義は, $Nu_x = \theta'|_{\eta=0} \sqrt{Re_x}$ であるから, (20)を代入して,

$$Nu_x = \frac{d\theta}{d\eta}\bigg|_{\eta=0} \sqrt{Re_x} = 0.3387 Pr^{1/3} \sqrt{Re_x} \quad (\text{for } Pr \rightarrow \infty) \quad (21)$$

となる.

● Pr 数が小さい場合

基本的には, 式(4)(5)を境界条件(10)の下で解けば良い. Pr 数が1以上のときは, 速度境界層に比べ温度境界層は薄い. したがって, Pr 数が大きい計算を行っても, 計算領域として $\eta = 10$ まで取っていれば十分である. しかしながら, Pr 数が1以下のときは, 速度境界層に比べ温度境界層の方が厚い. $\eta = 10$ まで取っていても Pr 数が小さい場合は, 温度境界層を計算できなくなる. そこで, Pr 数が1以下のときは, 温度境界層の厚さが計算領域を超えないようにする無次元化することが望ましい. 式(4)(5)を以下のようにそれぞれ変形する.

$$Pr \frac{d^3 g}{d\xi^3} + \frac{1}{2} g \frac{d^2 g}{d\xi^2} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \frac{1}{2} g \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \quad (23)$$

境界条件は

$$\begin{cases} g = g' = \theta = 0 & \text{at } \xi = 0 \\ g' = \theta = 1 & \text{as } \xi \rightarrow \infty \end{cases} \quad (24)$$

ただし, 無次元変数と無次元数は以下の通り定義される.

$$\xi = y \sqrt{\frac{u_\infty}{\alpha x}}, \quad g(\xi) = \frac{\psi}{\sqrt{\alpha u_\infty x}}, \quad \theta(\xi) = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} \quad (25)$$

このような無次元化により, 逆に速度境界層が壁付近に圧縮されていくことになる. Prandtl 数が小さくなるほど, 速度境界層における格子点数が少なくなるので, その点に注意を払って計算する必要がある. $Pr \rightarrow 0$ の極限では, 境界面上で流体が滑っている条件を仮定して, 既に述べたとおりである.

図5に低プラントル数の場合に対して, 幾つかの計算結果を示す.

Nu の定義は, $Nu_x = \frac{d\theta}{d\eta}\bigg|_{\eta=0} \sqrt{Re_x} = \frac{d\theta}{d\xi}\bigg|_{\xi=0} \sqrt{Pr} \sqrt{Re_x}$ であるから, 壁面における温度勾配を数値計算で求めればよい. 計算領域は $\xi = 10$ で統一した. プラントル数が小さくなると, 速度勾配は大きく (境界層は薄く) なることがわかる. 一方で, 壁面近傍での温度勾配分布はある値に漸近していくことがわかる. 表2に, その温度分布を示す.

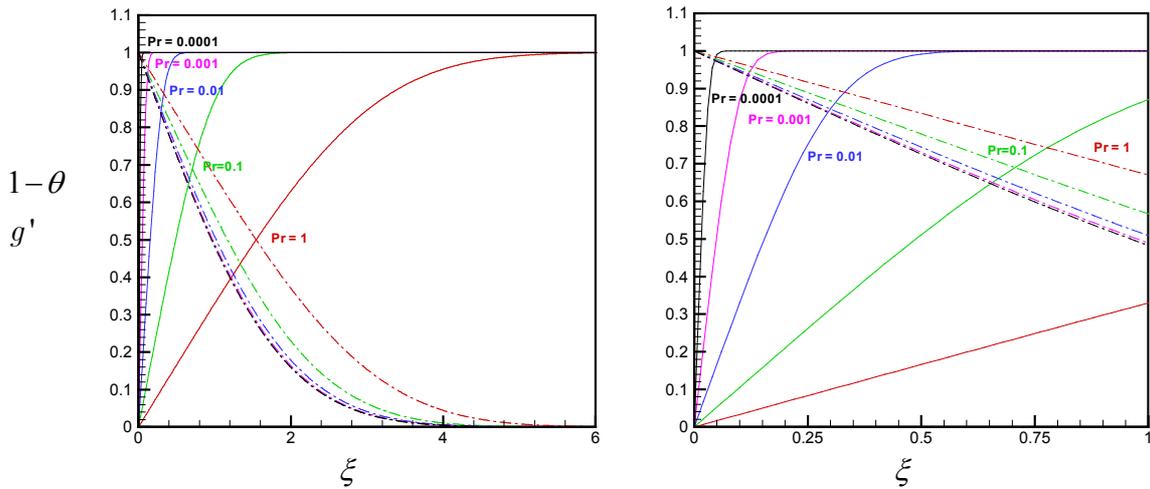


図5 低プラントル数流体の場合の速度と温度分布（右は壁付近の拡大）

表2 数値計算結果（低 Pr 数）

Prandtl 数	Nusselt 数	壁面温度勾配 $\left. \frac{d\theta}{d\xi} \right _{\xi=0}$
1	$0.3321\sqrt{Re_x}$	0.33206
0.7	$0.2927\sqrt{Re_x}$	0.34982
0.1	$0.1400\sqrt{Re_x}$	0.44280
0.01	$0.05159\sqrt{Re_x}$	0.51585
0.001	$0.01731\sqrt{Re_x}$	0.54742
0.0001	$0.005587\sqrt{Re_x}$	0.55866
$\rightarrow 0$	—	0.5642

表2における壁面速度勾配値は、式(14)で与えた極限值 0.5642 への漸近は緩やかである。水銀やガリウムのような液体金属では、係数値を 0.5 くらいに補正して式(14)を適用すればよい。ちなみに空気の場合は、およそ $Pr = 0.7$ であり、次式で予測できる。

$$Nu_x = 0.293\sqrt{Re_x} \quad (\text{for air}) \quad (26)$$

したがって、式(14)を空気には適用してはいけない。むしろ式(21)の方が良い。

● Pr 数が大きい場合

この場合は、式(4)(5)を計算するだけでよい。ヌセルト数は $Nu_x = \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} \sqrt{Re_x}$ で与えられる。

表3に結果をまとめる。

表3 数値計算結果 (高 Pr 数)

Prandtl 数	Nusselt 数	壁面温度勾配 $\left. \frac{d\theta}{d\eta} \right _{\eta=0}$	$\left. \frac{d\theta}{d\eta} \right _{\eta=0} / Pr^{1/3}$
0.7	$0.2927\sqrt{Re_x}$	0.29268	0.32963
1	$0.3321\sqrt{Re_x}$	0.33206	0.33206
8	$0.6756\sqrt{Re_x}$	0.67558	0.33779
27	$1.015\sqrt{Re_x}$	1.0153	0.33843
64	$1.354\sqrt{Re_x}$	1.3543	0.33858
125	$1.693\sqrt{Re_x}$	1.6932	0.33863
216	$2.032\sqrt{Re_x}$	2.0319	0.33864
$\rightarrow \infty$	—	—	0.3387

高プラントル数のときの温度分布は図6に示す。速度分布 f' は、プラントル数によらず共通である。プラントル数が大きい場合の計算では、温度境界層が非常に薄くなるので、数値精度が十分に確保されているか注意する必要がある。表3に示されるように、数値計算で得られた壁面の温度勾配値を $Pr^{1/3}$ で割った値は、すばやく 0.3387 に漸近していることがわかる。これは、表2で示した低プラントル数での漸近の仕方よりはずっと速い。これは壁面近傍において速度分布がほぼ直線的で曲率を持っていないことの反映である。したがって、式(21)は $Pr > 10$ 程度で非常に良い近似式となっていることがわかる。

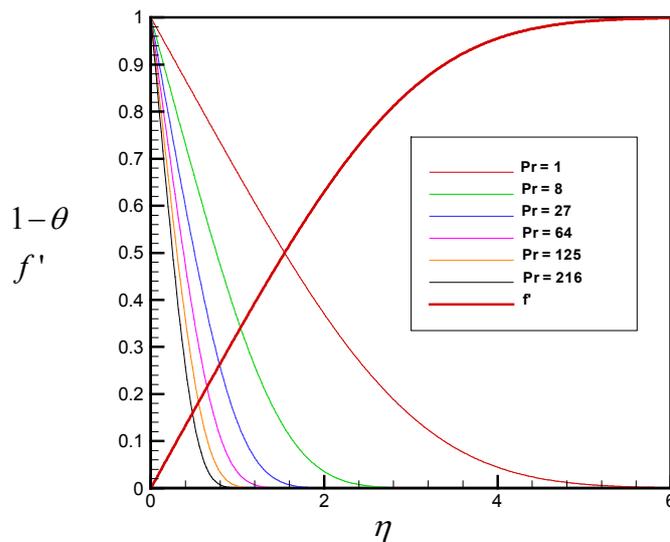


図6 高プラントル数流体の場合の温度分布