平板に沿う強制対流熱伝達（等熱流束加熱）

図 1 のように，半無限の水平加熱平板に沿う強制対流熱伝達を考える．主流は平板に平行であり，平板に沿う方向に x 軸を，直交する方向に y 軸をとるものとする．境界層近似された連続の式，運動方程式，およびエネルギー方程式は 2 次元のデカルト座標系で以下のように表されるものとする．

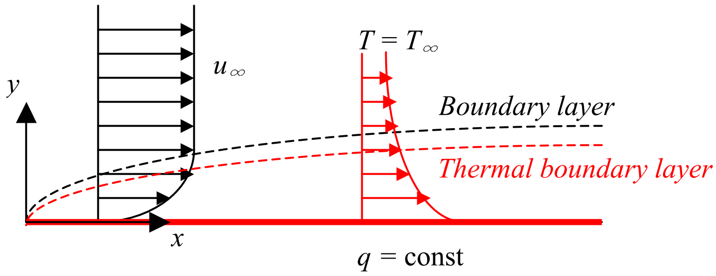

図 1

連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1}$$

運動方程式

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

エネルギー方程式

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{3}$$

境界条件

$$\begin{cases} y=0: & u=v=0, \quad q=-k\left(\partial T/\partial y\right)=\text{const} \\ y\to\infty: & u\to u_\infty, \quad T\to T_\infty \end{cases} \tag{4}$$

ここで，u は平板に沿う方向の速度成分，v は平板に直交する方向の速度成分，T は温度，ν は動粘性係数，α は温度伝導率，q は壁面の熱流束（一定値），k は流体の熱伝導率である．また u_∞ および T_∞ は，それぞれ平板から十分離れた場所における x 方向速度成分および温度を表す．

Prandtl 数（Pr）が十分に大きい場合に，局所 Nusselt 数（Nu_x）は以下の式で表されることを示す．ただし，流れ場および温度場の分布はそれぞれ相似であると仮定して良いものとする．

$$Nu_x = 0.4637\sqrt{Re_x}\,Pr^{1/3}$$

ただし，$Re_x = \dfrac{u_\infty x}{\nu}$，　$Pr = \dfrac{\nu}{\alpha}$ である．

解説

まず，流れ場および温度場の相似性を考慮して，方程式(1)(2)(3)を相似変換する．

式(1)を恒等的に満足させるために流れ関数 ψ を導入する．

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{5}$$

式(5)を式(2)に代入すれば，次式を得る．

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \tag{6}$$

無次元の流れ関数，相似変数，レイノルズ数をそれぞれ以下のように定義する．

$$f=\frac{\psi}{\sqrt{\nu u_\infty x}},\quad \eta=\frac{y}{\sqrt{\nu x/u_\infty}}=\frac{y}{x}\sqrt{Re_x},\quad Re_x=\frac{u_\infty x}{\nu} \tag{7}$$

ここで，x は平板前縁から平板に沿う方向の長さである．その結果，式(6)は下記の常微分方程式となる．

$$2f'''+ff''=0 \tag{8}$$

また，B. C.（境界条件）は，

$$\begin{cases}\eta=0: \quad f=f'=0\\ \eta\to\infty: \quad f'=1\end{cases} \tag{9}$$

となる．式(8), 式(9)で表される境界層を Blasius 境界層という．さて，残りのエネルギー方程式も無次元化を行う必要がある．そこで，無次元温度 θ を次式のように置く．

$$\theta=\frac{T-T_b}{T_a},\quad Y=\frac{y}{y_a},\quad X=\frac{x}{x_a},\quad \varPsi=\frac{\psi}{\psi_a} \tag{10}$$

温度の未定参照量は２つ（T_a, T_b）ある．流れ関数を使って表現すれば，式(3)は

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{11}$$

となるが，式(10)を代入し，整理して，

$$\frac{\partial\varPsi}{\partial Y}\frac{\partial\theta}{\partial X}-\frac{\partial\varPsi}{\partial X}\frac{\partial\theta}{\partial Y}=\frac{\alpha x_a}{y_a\psi_a}\frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2}$$

ここで，運動方程式の無次元化から，$(\nu x_a)/(y_a\psi_a)=1$ であったので，結局，エネルギー方程式として

$$\frac{\partial\varPsi}{\partial Y}\frac{\partial\theta}{\partial X}-\frac{\partial\varPsi}{\partial X}\frac{\partial\theta}{\partial Y}=\frac{1}{Pr}\frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2} \tag{12}$$

を得る．ここで，Pr はプラントル(Prandtl) 数という無次元数であり，次式で定義される．

$$Pr=\frac{\nu}{\alpha}=\frac{\mu/\rho}{k/(\rho c)}=\frac{c\mu}{k} \tag{13}$$

ここで，k は熱伝導率，ρ は密度，μ は粘性係数，c は比熱である．一方で，境界条件の式(4)も無次元化する．温度だけ抜き出し整理すると，

$$\begin{cases}Y=0: \quad q=-k\dfrac{\partial}{\partial y}\left[T_a\theta+T_b\right]=-k\dfrac{T_a}{y_a}\dfrac{\partial\theta}{\partial Y}\\ Y\to\infty: \quad T_a\theta+T_b=T_\infty\end{cases}$$

整理して

$$
\begin{cases}
Y=0\colon \quad \dfrac{\partial\theta}{\partial Y}=-\underbrace{\dfrac{qy_a}{kT_a}}_{1} \\
Y\to\infty\colon \quad \theta=\underbrace{\left(T_\infty-T_b\right)/T_a}_{0}
\end{cases}
$$

したがって，温度の境界条件は，$T_a=qy_a/k$，$T_b=T_\infty$ とおけば

$$
\begin{cases}
Y=0\colon \quad \partial\theta/\partial Y=-1 \\
Y\to\infty\colon \quad \theta=0
\end{cases}
\tag{14}
$$

となる．式(10)は，未定参照量が決まったので，無次元温度は次式のようになる．

$$
\theta=\frac{T-T_b}{T_a}=\frac{T-T_\infty}{qy_a/k}
$$

式(12)を解いても良いが二次元計算になり時間が長くかかる．そこで，式(8)を得るのと同様に，相似性を考慮して，式(11)の常微分化を試みる．式(7)より $y_a=\sqrt{\nu x/u_\infty}$ であるから，上の無次元温度は，

$$
\theta=\frac{T-T_\infty}{qy_a/k}=\frac{k\left(T-T_\infty\right)}{q}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}
\tag{15}
$$

となる．式(11)の各項は，

$$
u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{u_\infty\nu x}\cdot f\right)=\sqrt{u_\infty\nu x}\,\frac{df}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\sqrt{u_\infty\nu x}\,f'\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}=u_\infty f'
$$

$$
\begin{aligned}
v&=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{u_\infty\nu x}\cdot f\right)=-\left(\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{u_\infty\nu x}\right)\cdot f\left(\eta\right)-\sqrt{u_\infty\nu x}\,\frac{df}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} \\
&=-\sqrt{u_\infty\nu}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}f-\sqrt{u_\infty\nu x}\,f'\left(-\frac{\eta}{2x}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_\infty\nu}{x}}\left(f-\eta f'\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(T_\infty+\theta\frac{q}{k}\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}\right)=\frac{q}{k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}\right)=\frac{q}{k}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}+\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}}\right) \\
&=\frac{q}{k}\left(\frac{d\theta}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}+\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}}\right)=\frac{q}{k}\left(-\frac{\eta}{2x}\frac{d\theta}{d\eta}\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}+\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(T_\infty+\theta\frac{q}{k}\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}\right)=\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{q}{k}\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}=\frac{d\theta}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{q}{k}\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}=\frac{d\theta}{d\eta}\frac{q}{k}
$$

$$
\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\theta}{d\eta}\frac{q}{k}\right)=\frac{d}{d\eta}\left(\frac{d\theta}{d\eta}\frac{q}{k}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{q}{k}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\frac{d^2\theta}{d\eta^2}
$$

エネルギー方程式に代入すると，

$$
u_\infty f'\frac{q}{k}\left(-\frac{\eta}{2x}\frac{d\theta}{d\eta}\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}+\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_\infty\nu}{x}}\left(f-\eta f'\right)\frac{d\theta}{d\eta}\frac{q}{k}=\alpha\frac{q}{k}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\frac{d^2\theta}{d\eta^2}
$$

$$\cancel{-f'\frac{\eta}{2}\frac{d\theta}{d\eta}\sqrt{\frac{u_\infty \nu}{x}}}+u_\infty f'\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_\infty \nu}{x}}f\frac{d\theta}{d\eta}\cancel{+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_\infty \nu}{x}}\left(\eta f'\right)\frac{d\theta}{d\eta}}=\alpha\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\frac{d^2\theta}{d\eta^2}$$

$$f'\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{u_\infty \nu}{x}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_\infty \nu}{x}}f\frac{d\theta}{d\eta}=\alpha\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\frac{d^2\theta}{d\eta^2}$$

$$f'\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}f\frac{d\theta}{d\eta}=\frac{\alpha}{\nu}\frac{d^2\theta}{d\eta^2}$$

結局，次式を得ることができる．

$$2\theta''+Pr\left(f\theta'-f'\theta\right)=0 \tag{16}$$

これでエネルギー方程式も常微分化された．

ここで，解くべき常微分方程式，境界条件，無次元変数および無次元数をまとめておく．

$$f'''+\frac{1}{2}ff''=0 \tag{17}$$

$$\theta''+\frac{Pr}{2}\left(f\theta'-f'\theta\right)=0 \tag{18}$$

$$\begin{cases}\eta=0: & f=f'=0,\quad \theta'=-1\\ \eta\to\infty: & f'=1,\quad \theta=0\end{cases} \tag{19}$$

$$f=\frac{\psi}{\sqrt{\nu u_\infty x}},\quad \eta=y\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}},\quad \theta=\frac{k\left(T-T_\infty\right)}{q}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}},\quad Re_x=\frac{u_\infty x}{\nu},\quad Pr=\frac{\nu}{\alpha} \tag{20}$$

● $Pr\ \to\ \infty$の場合

$Pr\ \to\ \infty$のとき，速度境界層は温度境界層に比べてずっと厚く，温度境界層の中で流れ場の速度勾配は一様と考えて良いだろう．したがって無次元流れ関数fは,

$$f'=0.33206\eta\ ,\ f=\frac{0.33206}{2}\eta^2$$

と置ける．これを(18)に代入して,

$$\theta''+0.33206\frac{Pr}{2}\left(\frac{1}{2}\eta^2\theta'-\eta\theta\right)=0$$

を得る．ここで，解の形が$Pr^{1/3}$に比例していることから判断して，次のような変換を行う．

$$Pr^{1/3}\eta=\xi$$

各項を計算すると

$$\theta' = \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{d\theta}{d\xi}\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{d\theta}{d\xi}Pr^{1/3}$$

$$\theta'' = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{d\theta}{d\xi}Pr^{1/3}\right) = Pr^{1/3}\frac{d^2\theta}{d\xi^2}\frac{d\xi}{d\eta} = Pr^{2/3}\frac{d^2\theta}{d\xi^2}$$

これらを式(17)に代入すると

$$\theta'' + 0.33206\frac{Pr}{2}\left(\frac{1}{2}\eta^2\theta' - \eta\theta\right) = 0$$

$$Pr^{2/3}\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + 0.33206\frac{Pr}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{Pr^{1/3}}\right)^2\frac{d\theta}{d\xi}Pr^{1/3} - \left(\frac{\xi}{Pr^{1/3}}\right)\theta\right) = 0$$

そうすると，Pr に依存しない次式を得る．

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + 0.16603\left(\frac{1}{2}\xi^2\frac{d\theta}{d\xi} - \xi\theta\right) = 0 \tag{21}$$

この方程式を差分法により，以下の境界条件のもと，計算を行う．

$$\begin{cases} \xi = 0: \quad d\theta/d\xi = -Pr^{-1/3} \\ \xi \to \infty: \quad \theta = 0 \end{cases} \tag{22}$$

例えば，式(21)に仮想時間項を設けて，陽解法により反復計算を行い，定常になるまで繰り返すとする．

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + 0.16603\left(\frac{1}{2}\xi^2\frac{\partial\theta}{\partial\xi} - \xi\theta\right)$$

時間項にオイラー陽解法を，空間微分には二次精度の中心差分法を用いれば以下の式を得る．

$$\frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^{n+1}}{\Delta\tau} = \frac{\theta_{i-1}^n - 2\theta_i^n + \theta_{i+1}^n}{(\Delta\xi)^2} - 0.16603\left(\xi^2\frac{\theta_{i-1}^n - \theta_{i+1}^n}{4(\Delta\xi)} + \xi\theta_i^n\right) \tag{23}$$

ところで，局所 Nusselt 数 Nu_x は，局所熱伝達率を h_x，壁面の温度を T_w として

$$Nu_x \equiv \frac{h_x x}{k} = \frac{qx}{(T_w - T_\infty)k}, \qquad \because \quad q = h_x(T_w - T_\infty) \tag{24}$$

と与えられる．式(20) より $\theta_w = \dfrac{k(T_w - T_\infty)}{q}\sqrt{\dfrac{u_\infty}{\nu x}}$ を考慮（θ_w は壁面の無次元温度）して

$$Nu_x = \frac{qx}{(T_w - T_\infty)k} = \frac{x}{k}\frac{k}{\theta_w}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} = \frac{1}{\theta_w}\sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} = \frac{1}{\theta_w}\sqrt{Re_x} \tag{25}$$

つまり，数値計算により，壁面の無次元温度を求めさえすれば良いことがわかる．

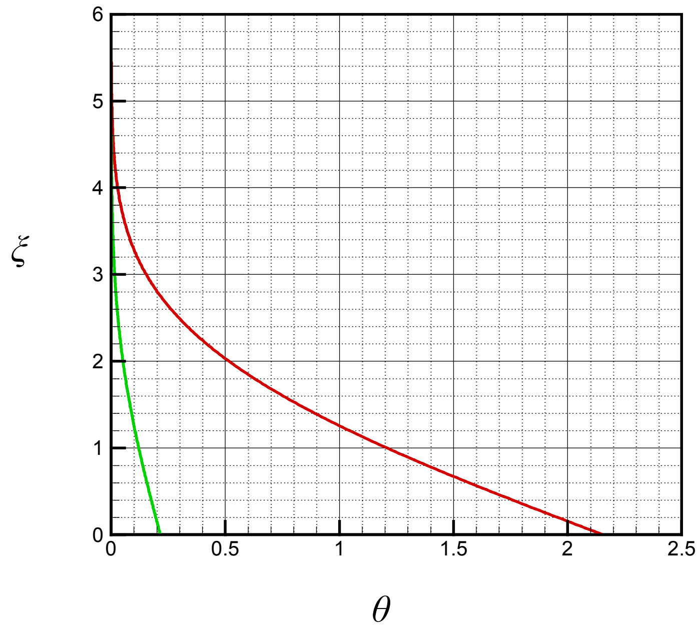

図２　数値計算で得られた無次元の温度分布

わずか数十秒の数値計算で，図２のように，壁面における無次元温度が得られた．赤は式(22)において，$Pr = 1$ とした場合であり，その値は 2.1565148 であった．一方，緑は $Pr = 1000$ とした場合であり，値は 0.1 倍になる．プラントル数が 1000 倍大きくなると，壁面の温度は 10 倍小さくなることがわかる．したがって，次式が成り立つ．

$$\theta|_{wall} = 2.1565148 \cdot Pr^{-1/3} \tag{26}$$

これを式(25)に代入すると，

$$Nu_x = \frac{1}{\theta_w}\sqrt{Re_x} = \frac{1}{2.1565148 \cdot Pr^{-1/3}}\sqrt{Re_x} \cong 0.4637\sqrt{Re_x}Pr^{1/3} \qquad (\text{for} \quad Pr \to \infty) \tag{27}$$

を得る．

● $Pr \to 0$ の場合

ついでに，$Pr \to 0$ のときも求めよう．この場合，速度境界層は温度境界層に比べてずっと薄く，温度境界層の中で流れ場は一様（境界で滑っている）と考えて良いだろう．したがって式(8)は，次式で近似できる．

$$f = \eta \tag{28}$$

これをエネルギー方程式に代入し，次式を得る．

$$\theta'' + \frac{Pr}{2}(\eta\theta' - \theta) = 0 \tag{29}$$

等温加熱のときと同様，次の変換式を用いる．

$$\frac{\sqrt{Pr}}{2}\eta = \zeta \tag{30}$$

式(29)のそれぞれの項を求めていく．

$$\theta' = \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{d\theta}{d\zeta}\frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{d\theta}{d\zeta}\frac{\sqrt{Pr}}{2}$$

$$\theta'' = \frac{d^2\theta}{d\eta^2} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{d\theta}{d\zeta}\frac{\sqrt{Pr}}{2}\right) = \frac{\sqrt{Pr}}{2}\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{d\theta}{d\zeta}\right)\frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{\sqrt{Pr}}{2}\frac{d^2\theta}{d\zeta^2}\frac{\sqrt{Pr}}{2} = \frac{Pr}{4}\frac{d^2\theta}{d\zeta^2}$$

式(29)に代入すると，

$$\frac{Pr}{4}\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} + \frac{Pr}{2}\left(\frac{\sqrt{Pr}}{2}\frac{2}{\sqrt{Pr}}\zeta\frac{d\theta}{d\zeta} - \theta\right) = 0$$

整理して，Prandtl 数に依存しない形を得る．

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} + 2\zeta\frac{d\theta}{d\zeta} - 2\theta = 0 \tag{31}$$

温度の境界条件は，次のように修正される．

$$\begin{cases} \zeta = 0: \quad \dfrac{d\theta}{d\zeta} = -\dfrac{2}{\sqrt{Pr}} \\ \zeta \to \infty: \quad \theta = 0 \end{cases} \tag{32}$$

これを数値計算して，壁面の温度は次式のような数値で得られた．

$$\theta\big|_w = 1.128328\,Pr^{-1/2} \tag{33}$$

したがって，局所ヌセルト数は，

$$Nu_x = \frac{1}{\theta_w}\sqrt{Re_x} = \frac{1}{1.128328 \cdot Pr^{-1/2}}\sqrt{Re_x} \cong \underbrace{0.8863}_{\sqrt{\pi}/2}\sqrt{Re_x}\,Pr^{1/2} \qquad \left(\text{for} \quad Pr \to 0\right) \tag{34}$$

と得られる．