

鉛直加熱平板の自然対流

自然対流の最も基本的な形態であると考えられる鉛直加熱平板の自然対流について考察する。右図のように、温度 T_∞ の静止流体中に、一定の温度 T_w の鉛直平板が置かれている場合を考える。加熱面近傍では流体は温められ、軽くなって上昇流が生じる。このとき、境界層方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underbrace{g\beta(T - T_\infty)}_{\text{浮力項}} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

となる。今回は、運動方程式とエネルギー方程式に時間項を含めて考えている。式(2)では、外力項として、密度の温度変化に起因する浮力項が考慮されていることに注意。ここで、 β は体膨張係数を表す。自然対流では、流れの駆動力はこの浮力である。 α は温度伝導率 (熱拡散率とも呼ばれる) であり、動粘性係数 (動粘度) と同じ次元を持つ。

式(3)を解いて、温度場が得られ、それが式(2)の浮力項に反映される。境界条件は、

$$\begin{cases} y=0: & u=v=0, \quad T=T_w \\ y \rightarrow \infty: & u=0, \quad T=T_\infty \end{cases} \quad (4)$$

と与えられる。

低プラントル数の無次元化

鉛直平板の高さを h として、粘性項の前にのみ Pr 数が現れるように無次元化すると、最終的に次式を得る (付録参照)。

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = Pr \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \theta \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (7)$$

境界条件は

$$\begin{cases} Y=0: & U=V=0, \quad \theta=1 \\ Y \rightarrow \infty: & U=0, \quad \theta=0 \end{cases} \quad (8)$$

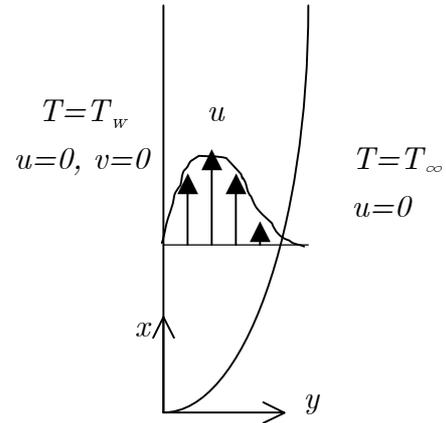


図1 鉛直加熱平板の自然対流

ここで、無次元の変数、および無次元数は以下の通りである。 h は平板の高さである。

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{x_a} = \frac{x}{h}, & Y &= \frac{y}{y_a} = \frac{y}{h(RaPr)^{-1/4}}, & \tau &= \frac{t}{t_a} = \frac{t}{(h^2/\alpha)(RaPr)^{-1/2}}, \\ U &= \frac{u}{u_a} = \frac{u}{(\alpha/h)(RaPr)^{1/2}}, & V &= \frac{v}{v_a} = \frac{v}{(\alpha/h)(RaPr)^{1/4}}, & \theta &= \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \\ Ra &= \frac{g\beta(T_w - T_\infty)h^3}{\alpha\nu}, & Pr &= \frac{\nu}{\alpha} \end{aligned} \quad (9)$$

以上のように無次元化することで、支配方程式中に Ra 数が表れないことに注意されたい。式(6)からわかるように、低プラントル数の極限では、粘性がゼロであるため、慣性項と浮力項がつりあう。

高プラントル数の無次元化

鉛直平板の高さを h として、粘性項および浮力項の両方の前に Pr 数が現れるように無次元化すると、次式を得る（付録参照）。

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \theta \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (12)$$

境界条件は

$$\begin{cases} U = V = 0, & \theta = 1 & \text{at } Y = 0 \\ U = 0, & \theta = 0 & \text{as } Y \rightarrow \infty \end{cases} \quad (13)$$

式(10), (12), (13)は、式(5), (7), (8)と共通である。無次元の変数、および無次元数は以下の通り。

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{x_a} = \frac{x}{h}, & Y &= \frac{y}{y_a} = \frac{y}{h(Ra)^{-1/4}}, & \tau &= \frac{t}{t_a} = \frac{t}{(h^2/\alpha)(Ra)^{-1/2}}, \\ U &= \frac{u}{u_a} = \frac{u}{(\alpha/h)(Ra)^{1/2}}, & V &= \frac{v}{v_a} = \frac{v}{(\alpha/h)(Ra)^{1/4}}, & \theta &= \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \\ Ra &= \frac{g\beta(T_w - T_\infty)h^3}{\alpha\nu}, & Pr &= \frac{\nu}{\alpha} \end{aligned} \quad (14)$$

式(11)からわかるように、高プラントル数の極限では、慣性項はゼロになるので、粘性項と浮力項がつりあう。

差分法による二次元境界層方程式の差分計算

低プラントル数の場合を例にとり、式(5), (6), (7), (8)を差分法により解くことを考える。

鉛直平板が半無限であるとして相似解を仮定して、一次元化することも可能であるが、ここでは、そのまま二次元方程式を解くことを考える。左辺の時間項を前進差分で、それ以外の空間微分は中心差分（移流項や対流項は発散する場合は風上差分）で離散化し、陽解法を用いると、次式を得る。

<運動方程式>

$$\underbrace{\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta \tau}}_{\text{時間項}} = \underbrace{-U_{i,j}^n \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta X}}_{\text{移流項}} - \underbrace{V_{i,j}^n \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2\Delta Y}}_{\text{移流項}} + \underbrace{Pr \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{(\Delta Y)^2}}_{\text{粘性拡散項}} + \underbrace{\theta_{i,j}^n}_{\text{浮力項}} \quad (15)$$

<エネルギー方程式>

$$\underbrace{\frac{\theta_{i,j}^{n+1} - \theta_{i,j}^n}{\Delta \tau}}_{\text{時間項}} = \underbrace{-U_{i,j}^n \frac{\theta_{i+1,j}^n - \theta_{i-1,j}^n}{2\Delta X}}_{\text{対流項}} - \underbrace{V_{i,j}^n \frac{\theta_{i,j+1}^n - \theta_{i,j-1}^n}{2\Delta Y}}_{\text{対流項}} + \underbrace{\frac{\theta_{i,j+1}^n - 2\theta_{i,j}^n + \theta_{i,j-1}^n}{(\Delta Y)^2}}_{\text{熱拡散項}} \quad (16)$$

V を求めるには、連続の式を用いる。下記のように、 U の X 方向勾配の補間値（ここでは単純に線形補間とする）を用いて、壁面から順に積分すれば良い。

<連続の式>

$$\frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta Y} = -\frac{1}{2} \left(\frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta X} + \frac{U_{i+1,j-1}^{n+1} - U_{i-1,j-1}^{n+1}}{2\Delta X} \right) \quad (17)$$

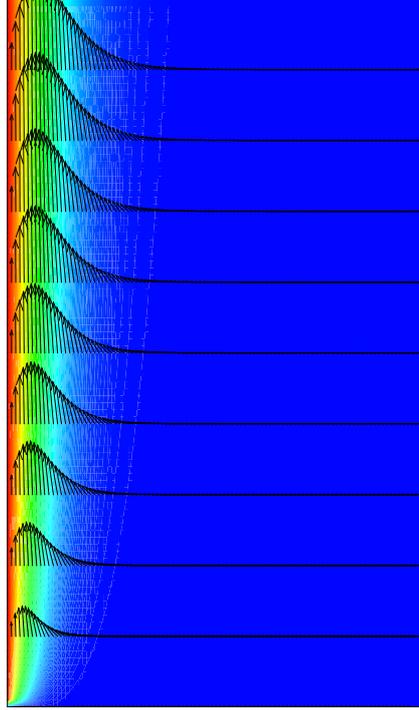
境界条件の無限大 ($Y = \infty$) は、温度境界層が速度境界層と同程度であれば、10くらいに設定すれば十分である。

$$\begin{cases} Y=0: U_{i,1} = V_{i,1} = 0, \theta_{i,1} = 1 & \text{for } i=2,3,\dots,N_X-1 \\ Y=10: U_{i,N_Y} = 0, \theta_{i,N_Y} = 0 & \text{for } i=2,3,\dots,N_X-1 \end{cases} \quad (18)$$

なお、 X の両端における条件が数値計算には必要だが、元の方程式からは何も与えることができない。したがって、例えば、 X 方向の速度勾配が等しいなどと置いて適宜対処する必要がある。計算の手順は、まず式(15)から U を求める。次に式(17)から V を求める。最後に式(16)から θ を求める。以上の3つの手順を収束するまで繰り返し、最終的に数値解（定常解）を得る。

可視化結果 空気を想定した $Pr = 0.7$ の流体で、二次元の数値計算の結果、例えば以下のような図が描ける。水平軸が y で縦軸が x である。加熱壁面に吸い込まれている様子が見て取れる。また上に行くほど速度が大きくなっており、温度境界層は少しずつ厚くなるのがわかる。

Pr = 0.7



付録：無次元化について

有次元の参照量を変数に下付き添え字 a を付け表すものとする.

$$X = \frac{x}{h}, \quad Y = \frac{y}{y_a}, \quad \tau = \frac{t}{t_a}, \quad U = \frac{u}{u_a}, \quad V = \frac{v}{v_a}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_a} \quad (19)$$

式(19)をそれぞれ式(1), (2), (3), (4)に代入し整理すると,

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \underbrace{\frac{h v_a}{y_a u_a}}_{[1]} \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (20)$$

$$\underbrace{\frac{h}{t_a u_a}}_{[2]} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \underbrace{\frac{h v_a}{y_a u_a}}_{[1]} V \frac{\partial U}{\partial Y} = \underbrace{\frac{v h}{y_a^2 u_a}}_{[3]} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \underbrace{\frac{g \beta T_a h}{u_a^2}}_{[4]} \theta \quad (21)$$

$$\underbrace{\frac{h}{t_a u_a}}_{[2]} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + \underbrace{\frac{h v_a}{y_a u_a}}_{[1]} V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \underbrace{\frac{\alpha h}{y_a^2 u_a}}_{[5]} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (22)$$

$$\begin{cases} Y = 0: & U = V = 0, \quad \theta = \underbrace{\frac{T_w - T_\infty}{T_a}}_{[6]} \\ Y \rightarrow \infty: & U = 0, \quad \theta = 0 \end{cases} \quad (23)$$

<低プラントル数の場合>

浮力と慣性力が支配的であるので、粘性項のみに Pr が現れるように無次元化をする。

$$[6]=1 \text{ より, } \frac{T_w - T_\infty}{T_a} = 1 \Rightarrow T_a = T_w - T_\infty \quad (24)$$

$$[5]=1 \text{ より, } \frac{\alpha h}{y_a^2 u_a} = 1 \Rightarrow y_a = \left(\frac{\alpha h}{u_a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

$$[1]=1 \text{ より, } \frac{h v_a}{y_a u_a} = 1 \Rightarrow v_a = \frac{y_a u_a}{h} \quad (26)$$

$$[3] \text{ は, } \frac{\nu h}{y_a^2 u_a} = \frac{\alpha h}{y_a^2 u_a} \frac{\nu}{\alpha} = Pr \quad (27)$$

[4]=1 より,

$$\frac{g\beta T_a h}{u_a^2} = 1 \Leftrightarrow u_a = (g\beta T_a h)^{1/2} = \frac{\alpha}{h} \left[\frac{g\beta (T_w - T_\infty) h^3 \nu}{\alpha \nu} \frac{\nu}{\alpha} \right]^{1/2} = \frac{\alpha}{h} (RaPr)^{1/2} \quad (28)$$

(28)を(25)に代入すると,

$$y_a = \left(\frac{\alpha h}{u_a} \right)^{1/2} = \left(\frac{\alpha h}{\frac{\alpha}{h} (RaPr)^{1/2}} \right)^{1/2} = \frac{h}{(RaPr)^{1/4}} \quad (29)$$

$$v_a = \frac{y_a u_a}{h} = \frac{1}{h} \frac{h}{(RaPr)^{1/4}} \frac{\alpha}{h} (RaPr)^{1/2} = \frac{\alpha}{h} (RaPr)^{1/4} \quad (30)$$

[2]=1 より,

$$\frac{h}{t_a u_a} = 1 \Rightarrow t_a = \frac{h}{u_a} = \frac{h}{\frac{\alpha}{h} (RaPr)^{1/2}} = \frac{h^2}{\alpha (RaPr)^{1/2}} \quad (31)$$

したがって、式(5)–(9)を得る。

<高プラントル数の場合>

浮力と粘性力が支配的であるので、慣性項に Pr の逆数が現れる（浮力項と粘性項に Pr が現れる）ように無次元化をする。

$$[6]=1 \text{ より, } \frac{T_w - T_\infty}{T_a} = 1 \Rightarrow T_a = T_w - T_\infty \quad (32)$$

$$[5]=1 \text{ より, } \frac{\alpha h}{y_a^2 u_a} = 1 \Rightarrow y_a = \left(\frac{\alpha h}{u_a} \right)^{1/2} \quad (33)$$

$$[1]=1 \text{ より, } \frac{hv_a}{y_a u_a} = 1 \Rightarrow v_a = \frac{y_a u_a}{h} \quad (34)$$

$$[3] \text{ は, } \frac{vh}{y_a^2 u_a} = \frac{\alpha h}{y_a^2 u_a} \frac{v}{\alpha} = Pr \quad (35)$$

粘性項と係数を合すため,

[4]=Pr より,

$$\frac{g\beta T_a h}{u_a^2} = Pr \Rightarrow u_a = \left(\frac{g\beta T_a h}{Pr} \right)^{1/2} = \left(\frac{\alpha g\beta (T_w - T_\infty) h}{\nu} \right)^{1/2} = \frac{\alpha}{h} Ra^{1/2} \quad (36)$$

(36)を(33)に代入すると,

$$y_a = \left(\frac{\alpha h}{u_a} \right)^{1/2} = \left(\frac{\alpha h}{\frac{\alpha}{h} Ra^{1/2}} \right)^{1/2} = h Ra^{-1/4} \quad (37)$$

(34)は,

$$v_a = \frac{y_a u_a}{h} = \frac{1}{h} (h Ra^{-1/4}) \left(\frac{\alpha}{h} Ra^{1/2} \right) = \frac{\alpha}{h} Ra^{1/4} \quad (38)$$

[2]=1 より,

$$\frac{h}{t_a u_a} = 1 \Rightarrow t_a = \frac{h}{u_a} = \frac{h}{\frac{\alpha}{h} Ra^{1/2}} = Ra^{-1/2} \frac{h^2}{\alpha} \quad (39)$$

したがって, 式(10)–(14)を得る.

常微分化 (相似解)

時間項を落とした定常方程式の場合に, 低プラントル数の場合を例にとり, η のみの関数に変換 (常微分化) する. まず式(9)において, $X=1$ とし, つまり相似解を仮定し, 式(40)を得る.

$$c = \left\{ \frac{g\beta (T_w - T_\infty)}{\alpha^2} \right\}^{1/4}, \quad \eta = \frac{y}{x (Ra_x Pr)^{-1/4}} = cx^{-1/4} y, \quad (40)$$

$$U = \frac{u}{\frac{\alpha}{x} (Ra_x Pr)^{1/2}} = \frac{u}{\alpha c^2} x^{-1/2}, \quad V = \frac{v}{\frac{\alpha}{x} (Ra_x Pr)^{1/4}} = \frac{v}{\alpha c} x^{1/4}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

$$Ra_x = \frac{g\beta (T_w - T_\infty) x^3}{\alpha \nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

以下, 各項について微分した結果を示す. 定数 c は計算の都合上, 上述のように定義している.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\alpha c^2}{4} x^{-1/2} (2U - \eta U'), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha c^3 x^{1/4} U', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \alpha c^4 U'', \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha c^2 x^{-1/2} V'$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -(T_w - T_\infty) \frac{cy}{4} x^{-5/4} \theta', \quad \frac{\partial T}{\partial y} = (T_w - T_\infty) cx^{-1/4} \theta', \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = (T_w - T_\infty) c^2 x^{-1/2} \theta''$$

ここで、'は η に関する常微分を表す。これらをすべて有次元の基礎式に代入すると、最終的に次式を得る。

<連続の式>

$$\frac{dV}{d\eta} = \frac{\eta}{4} \frac{dU}{d\eta} - \frac{1}{2} U \quad (41)$$

<運動方程式>

$$U \frac{dV}{d\eta} - V \frac{dU}{d\eta} + Pr \frac{d^2 U}{d\eta^2} + \theta = 0 \quad (42)$$

<エネルギー方程式>

$$\left(\frac{\eta}{4} U - V \right) \frac{d\theta}{d\eta} + \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} = 0 \quad (43)$$

<境界条件>

$$\begin{cases} \eta = 0: & U = V = 0, \quad \theta = 1 \\ \eta \rightarrow \infty: & U = \theta = 0 \end{cases} \quad (44)$$

以上の連立常微分方程式を差分法により、ヤコビ法などの反復法で数値的に解く。

参考

流れ関数 f を使って表現する。まず式(41)を積分すると、

$$V = \frac{\eta}{4} U - \int \frac{1}{4} U d\eta - \int \frac{1}{2} U d\eta = \frac{\eta}{4} f' - \frac{3}{4} f \quad (\because f' \equiv U)$$

したがって、式(42)は次のようになる。

$$f' \left(\frac{\eta}{4} \frac{df'}{d\eta} - \frac{1}{2} f' \right) - \left(\frac{\eta}{4} f' - \frac{3}{4} f \right) \frac{df'}{d\eta} + Pr \frac{d^2 f'}{d\eta^2} + \theta = 0$$

整理して

$$-\frac{1}{2} f' f' + \frac{3}{4} f f'' + Pr f''' + \theta = 0 \quad (45)$$

一方、式(43)は

$$\frac{3}{4} f \theta' + \theta'' = 0 \quad (46)$$

境界条件も f で表現できて、

$$\begin{cases} \eta = 0: & f' = f = 0, \quad \theta = 1 \\ \eta \rightarrow \infty: & f' = \theta = 0 \end{cases} \quad (47)$$

となる。伝熱学の教科書では、上記のような式で与えられていることが多い(例えば、日本機械学会編 JSME テキストシリーズ「伝熱工学」page 89, 式(3.186), (3.187), (3.188))。数値計算する上では、流れ関数 f を用いても、用いなくても大差はない。

数值解析法

ここでは、前進積分法にニュートン法を援用した方法を示す。

$$\frac{1}{2}U^2 - \frac{3}{4}\frac{dU}{d\eta}f = Pr\frac{d^2U}{d\eta^2} + \theta \quad (48)$$

$$-\frac{3}{4}f\frac{d\theta}{d\eta} = \frac{d^2\theta}{d\eta^2} \quad (49)$$

$$\frac{df}{d\eta} = U \quad (50)$$

境界条件は、

$$\begin{cases} \eta = 0: & f = 0, \quad U = 0, \quad \theta = 1 \\ \eta \rightarrow \infty: & U = 0, \quad \theta = 0 \end{cases} \quad (51)$$

中心差分で離散化する。

$$0 = -\frac{1}{2}U_i^2 + \frac{3}{4}f_i\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2(\Delta\eta)} + Pr\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta\eta)^2} + \theta_i \quad (52)$$

$$0 = \frac{3}{4}f_i\frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2(\Delta\eta)} + \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{(\Delta\eta)^2} \quad (53)$$

$$\frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta\eta} = \frac{U_i + U_{i-1}}{2} \quad (54)$$

これを整理して、

$$U_{i+1} = \frac{[4(\Delta\eta)^2 U_i + 16Pr]U_i - [8Pr - 3(\Delta\eta)f_i]U_{i-1} - 8(\Delta\eta)^2 \theta_i}{[8Pr + 3(\Delta\eta)f_i]} \quad (55)$$

$$\theta_{i+1} = \frac{16\theta_i - [8 - 3(\Delta\eta)f_i]\theta_{i-1}}{[8 + 3(\Delta\eta)f_i]} \quad (56)$$

$$f_i = f_{i-1} + \left(\frac{U_i + U_{i-1}}{2}\right)\Delta\eta \quad (57)$$

$$\begin{cases} \eta \rightarrow \infty: & U_N = 0, \quad \theta_N = 0 \\ \eta = 0: & f_1 = 0, \quad U_1 = 0, \quad \theta_1 = 1 \end{cases} \quad (58)$$

$i = 2$ とすれば、赤字が境界条件で、青字が未定の値 U_2, θ_2 。これらを決めれば、順次積分していくことができる。

$$f_2 = f_1 + \left(\frac{U_2 + U_1}{2}\right)\Delta\eta \quad (59)$$

$$\theta_3 = \frac{16\theta_2 - [8 - 3(\Delta\eta)f_2]\theta_1}{[8 + 3(\Delta\eta)f_2]} \quad (60)$$

$$U_3 = \frac{[4(\Delta\eta)^2 U_2 + 16Pr]U_2 - [8Pr - 3(\Delta\eta)f_2]U_1 - 8(\Delta\eta)^2 \theta_2}{[8Pr + 3(\Delta\eta)f_2]} \quad (61)$$

ここで、 θ_N は θ_2 の関数であるとみなし、 U_N は U_2 の関数とみなす。
これを数式で書けば、

$$\theta_N = f(\theta_2) = 0, \quad U_N = g(U_2) = 0 \quad (62)$$

であるので、ニュートン法より、 m を反復回数として、

$${}^{m+1}\theta_2 = {}^m\theta_2 - C_1 \cdot {}^m\theta_N, \quad {}^{m+1}U_2 = {}^mU_2 - C_2 \cdot {}^mU_N \quad (63)$$

とすれば良いだろう。これを用いて、繰り返し計算すれば収束するはずである。

まとめ

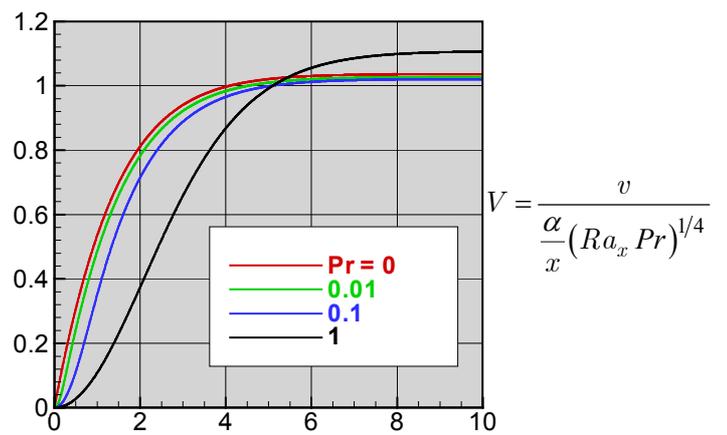
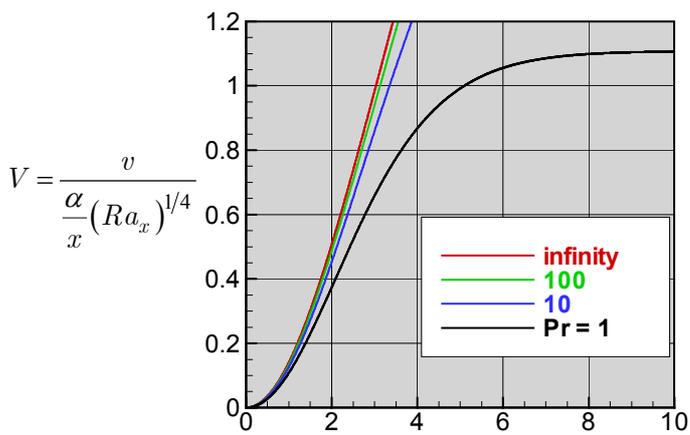
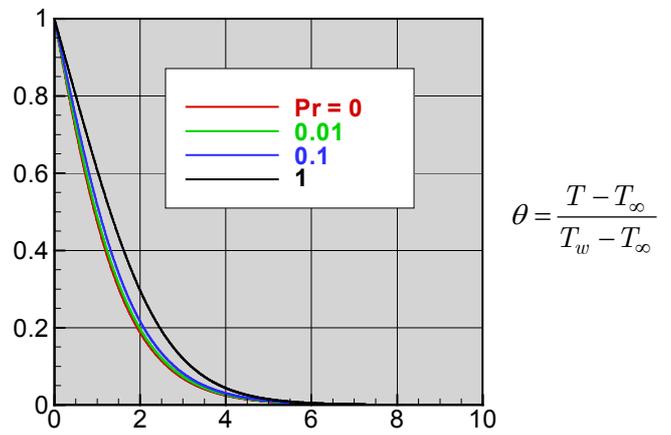
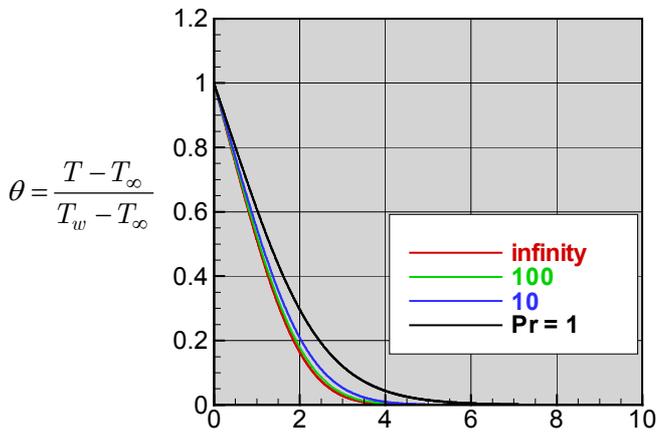
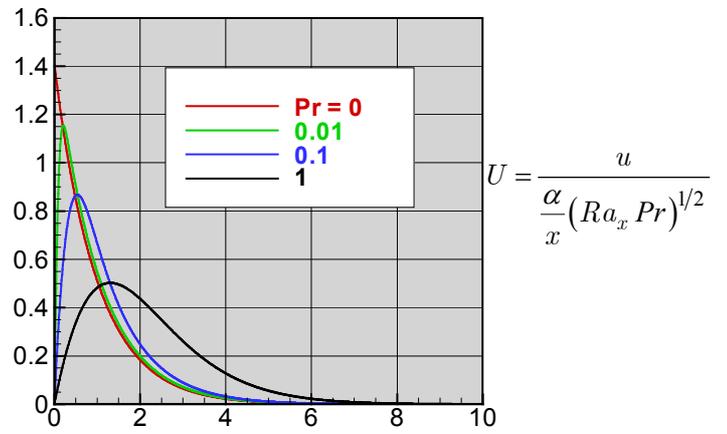
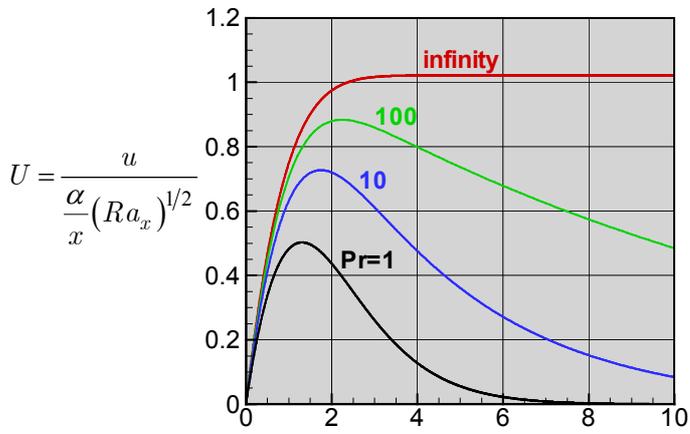
$$f_i = f_{i-1} + \left(\frac{U_i + U_{i-1}}{2} \right) \Delta\eta, \quad (2 \leq i \leq N) \quad (64)$$

$$\theta_{i+1} = \frac{16\theta_i - [8 - 3(\Delta\eta)f_i]\theta_{i-1}}{[8 + 3(\Delta\eta)f_i]}, \quad (2 \leq i \leq N-1) \quad (65)$$

$$U_{i+1} = \frac{[4(\Delta\eta)^2 U_i + 16Pr]U_i - [8Pr - 3(\Delta\eta)f_i]U_{i-1} - 8(\Delta\eta)^2 \theta_i}{[8Pr + 3(\Delta\eta)f_i]}, \quad (2 \leq i \leq N-1) \quad (66)$$

$$\begin{cases} \eta \rightarrow \infty: & {}^{m+1}\theta_2 = {}^m\theta_2 - C_1 \cdot {}^m\theta_N, \quad {}^{m+1}U_2 = {}^mU_2 - C_2 \cdot {}^mU_N \\ \eta = 0: & f_1 = 0, \quad U_1 = 0, \quad \theta_1 = 1 \end{cases} \quad (67)$$

数值解析结果



Nusselt 数の計算

低プラントル数のとき, $\eta = \frac{y}{x} (Ra_x Pr)^{1/4}$

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = -k(T_w - T_\infty) \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{d\theta}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = -k(T_w - T_\infty) cx^{-1/4} \theta' \Big|_{\eta=0}$$

$$q = h(T_w - T_\infty)$$

$$\begin{aligned} Nu_x &= \frac{hx}{k} = \frac{\overbrace{h(T_w - T_\infty)x}^q}{k(T_w - T_\infty)} = \frac{x \overbrace{k(T_w - T_\infty)cx^{-1/4} \theta' \Big|_{\eta=0}}^q}{k(T_w - T_\infty)} = cx^{3/4} \theta' \Big|_{\eta=0} \\ &= \left\{ \frac{g\beta(\theta_w - \theta_\infty)}{\alpha^2} \right\}^{1/4} x^{3/4} \theta' \Big|_{\eta=0} \left\{ \frac{g\beta(\theta_w - \theta_\infty)x^3 \nu}{\alpha \nu} \right\}^{1/4} \theta' \Big|_{\eta=0} = (Ra_x Pr)^{1/4} \theta' \Big|_{\eta=0} \end{aligned} \quad (68)$$

高プラントル数 (Pr が 1 以上) では, 次式で与えられる.

$$Nu_x = (Ra_x)^{1/4} \theta' \Big|_{\eta=0} \quad (69)$$

$\theta' \Big|_{\eta=0}$ については, 数値計算により求められる. 表 1 にヌセルト数の結果をまとめる.

表 1 壁面が等温加熱の場合における各 Pr 数に対する局所 Nu 数 (Nu_x)

Pr	0	0.01	0.1	1	10	100	∞
高 Pr の無次元化	右の値に $(Ra_x)^{1/4}$ 掛ける			0.4010	0.4649	0.4900	0.5027
低 Pr の無次元化	0.6004	0.5698	0.5146	0.4010	左の値に $(Ra_x Pr)^{1/4}$ 掛ける		