非圧縮流れの数値計算法

○ MAC 法

外力がない場合，単相の非圧縮性 Navier-Stokes の運動方程式と連続の式は，以下のように書ける．

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p+\nu\nabla^2\vec{u} \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0 \tag{2}$$

非圧縮流れの数値計算では，連続の式(2)を満たすように，圧力を求める．無次元化された式をベースにして考える．

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau}+\left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{U}=-\vec{\nabla}P+\frac{1}{Re}\nabla^2\vec{U} \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U}=0 \tag{4}$$

ここで，無次元の各変数は，代表長さを l，代表速度を u_0 として，以下のように決められる．

$$\left(X,Y,Z\right)=\frac{\left(x,y,z\right)}{l},\quad \tau=\frac{t}{l/u_0},\quad \vec{U}=\frac{\vec{u}}{u_0},\quad P=\frac{p}{\rho u_0^2},\quad Re=\frac{u_0 l}{\nu} \tag{5}$$

粘性項，慣性項，圧力項だけの問題を考えると，密度一定の非圧縮流れを想定するとき，レイノルズ数 Re が唯一のパラメータである．数値計算法の説明の為に，(3)式および(4)式を簡易的にそれぞれ次のように書くこととする．上付き添え字 n は時間ステップを表す．

$$\frac{\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^{n}}{\Delta\tau}=-\vec{\nabla}P^{n+1}+\vec{f}\left(\vec{U}^{n}\right) \tag{6}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U}^{n+1}=0 \tag{7}$$

ここで，(6)の右辺第二項は，

$$\vec{f}\left(\vec{U}^{n}\right)=-\left(\vec{U}^{n}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{U}^{n}+\frac{1}{Re}\nabla^2\vec{U}^{n} \tag{8}$$

を意味し，粘性項と慣性項を含む（もし外力があればここに含める）．(6)式では，圧力のみ陰的に離散化されていることに注意．(6)式の div（発散）をとると，

$$\frac{\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{U}^{n+1}}_{0}-\vec{\nabla}\cdot\vec{U}^{n}}{\Delta\tau}=-\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}P^{n+1}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{f}\left(\vec{U}^{n}\right)\right]$$

ここで，(7)式を考慮すれば，

$$\nabla^2P^{n+1}=\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{U}^{n}}{\Delta\tau}+\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{f}\left(\vec{U}^{n}\right)\right] \tag{9}$$

となり，圧力に関するポアソン方程式を得る．結局まとめると，MAC 法のアルゴリズムは次のように書ける．

１．(9)の圧力のポアソン方程式を解いて，n+1 ステップにおける圧力場 P^{n+1} を求める．

２．(6)から n+1 ステップにおける速度場 $\vec{U}^{n+1}$ を求める．

３．これらの一連の計算を繰り返す．

以上のように，MAC 法では，n+1 ステップにおける速度の発散をゼロとしながら計算するのがポイントである．

実際，(9)式に対して，スタッガード格子上で２次元の場合に成分表示すると，

$$\frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial Y^2}=\frac{\dfrac{\partial U^n}{\partial X}+\dfrac{\partial V^n}{\partial Y}}{\Delta\tau}+\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{f}\left(\vec{U}^n\right)\right] \tag{10}$$

圧力定義点まわりで離散化すると，差分式は次のようになる．

$$\frac{P^{n+1}_{i+1,j}-2P^{n+1}_{i,j}+P^{n+1}_{i-1,j}}{\left(\Delta X\right)^2}+\frac{P^{n+1}_{i,j+1}-2P^{n+1}_{i,j}+P^{n+1}_{i,j-1}}{\left(\Delta Y\right)^2}=\frac{\dfrac{U^n_{i,j}-U^n_{i-1,j}}{\Delta X}+\dfrac{V^n_{i,j}-V^n_{i,j-1}}{\Delta Y}}{\Delta\tau}+\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{f}\left(\vec{U}^n\right)\right] \tag{11}$$

この式を眺めると，右辺は n ステップであり既知であるのに対し，左辺は n+1 で未知であるので，連立方程式を解かなければならないことがわかる．つまり行列計算が必要である．(9)の右辺の第二項の計算が面倒なのが MAC 法の問題点のひとつである．

○　<u>SMAC 法</u>

MAC 法では，(9)式の圧力場の計算に時間を要する．SMAC 法では，(6)式を次のように二段階に分けて考える．

$$\frac{\vec{U}^*-\vec{U}^n}{\Delta\tau}=-\vec{\nabla}P^n+\vec{f}\left(\vec{U}^n\right) \tag{12}$$

$$\frac{\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^*}{\Delta\tau}=-\vec{\nabla}\left(P^{n+1}-P^n\right)=-\vec{\nabla}\left(\delta P\right) \tag{13}$$

実際，(12)と(13)を加えると，(6)式になることがわかる．今，(13)式の左辺を

$$\delta\vec{U}=\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^* \tag{14}$$

とおけば，(13)は，

$$\delta\vec{U}=-\Delta\tau\cdot\vec{\nabla}\left(\delta P\right) \tag{15}$$

とも書ける．さて，(13)の div をとり，

$$\frac{\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{U}^{n+1}}_{0}-\vec{\nabla}\cdot\vec{U}^*}{\Delta\tau}=-\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\nabla}\left(\delta P\right)\right] \tag{16}$$

(7)を考慮すると，

$$\nabla^2\left(\delta P\right)=\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{U}^*}{\Delta\tau} \tag{17}$$

となり，圧力の補正量に関するポアソン方程式を得る．結局，ＳＭＡＣ法のアルゴリズムは以下のようにまとめられる．

１．(12)から，速度の予測値 $\vec{U}^*$ を求める．
２．(17)のポアソン方程式を解いて，圧力の修正量 δP を求める．
３．(13)から，n+1 ステップの速度 $\vec{U}^{n+1}$ を求める．
４．これらの一連の計算を繰り返す．

SMAC 法では，ポアソン方程式が MAC 法に比べて簡単な形になっているのが利点であるが，行列を解かなければならないという点では MAC 法と変わりない．

○ HSMAC 法

HSMAC 法では，修正圧力場に対して，行列計算をせずに解く方法である．(17)は，成分表示で以下のようになる．

$$\frac{\partial^2(\delta P)}{\partial X^2}+\frac{\partial^2(\delta P)}{\partial Y^2}=\frac{\left(\dfrac{\partial U^*}{\partial X}+\dfrac{\partial V^*}{\partial Y}\right)}{\Delta\tau} \tag{18}$$

さらに，離散化を施すと，

$$\begin{aligned}&\frac{(\delta P)_{i+1,j}-2(\delta P)_{i,j}+(\delta P)_{i-1,j}}{(\Delta X)^2}+\frac{(\delta P)_{i,j+1}-2(\delta P)_{i,j}+(\delta P)_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2}\\&\qquad=\frac{\left(\dfrac{U^*_{i,j}-U^*_{i-1,j}}{\Delta X}+\dfrac{V^*_{i,j}-V^*_{i,j-1}}{\Delta Y}\right)}{\Delta\tau}\end{aligned} \tag{19}$$

もし，ここで$(\delta P)_{i,j}$の隣接点の圧力補正量を落としてしまえば，次式が得られる．

$$(\delta P)_{i,j}=\frac{-\left(\dfrac{U^*_{i,j}-U^*_{i-1,j}}{\Delta X}+\dfrac{V^*_{i,j}-V^*_{i,j-1}}{\Delta Y}\right)}{2\left(\dfrac{1}{(\Delta X)^2}+\dfrac{1}{(\Delta Y)^2}\right)(\Delta\tau)}=P^{n+1}_{i,j}-P^n_{i,j} \tag{20}$$

これだと，行列方程式を解かずに圧力の補正量が簡単に求められる．しかし，隣接点の圧力修正量を無視したことにより，反復計算を要する．(15)式より，速度の修正量は，各成分表示で次のように書ける．

$$(\delta U)_{i,j}=\Delta\tau\cdot\left(\frac{(\delta P)_{i,j}-(\delta P)_{i+1,j}}{\Delta X}\right) \tag{21}$$

$$(\delta U)_{i-1,j}=\Delta\tau\cdot\left(\frac{(\delta P)_{i-1,j}-(\delta P)_{i,j}}{\Delta X}\right) \tag{22}$$

$$(\delta V)_{i,j}=\Delta\tau\cdot\left(\frac{(\delta P)_{i,j}-(\delta P)_{i,j+1}}{\Delta Y}\right) \tag{23}$$

$$(\delta V)_{i,j-1}=\Delta\tau\cdot\left(\frac{(\delta P)_{i,j-1}-(\delta P)_{i,j}}{\Delta Y}\right) \tag{24}$$

やはり隣接点の圧力補正量を落とすと，それぞれ次式を得る．

$$(\delta U)_{i,j}=\frac{\Delta\tau}{\Delta X}\cdot(\delta P)_{i,j} \tag{25}$$

$$(\delta U)_{i-1,j}=-\frac{\Delta\tau}{\Delta X}\cdot(\delta P)_{i,j} \tag{26}$$

$$\left(\delta V\right)_{i,j} = \frac{\Delta\tau}{\Delta Y}\cdot\left(\delta P\right)_{i,j} \tag{27}$$

$$\left(\delta V\right)_{i,j-1} = -\frac{\Delta\tau}{\Delta Y}\cdot\left(\delta P\right)_{i,j} \tag{28}$$

圧力の反復修正式は，(20)から次のように与えられる．

$${}^{m+1}P_{i,j}^{n+1} = {}^{m}P_{i,j}^{n+1} - \frac{\left(\dfrac{{}^{m}U_{i,j}^{n+1} - {}^{m}U_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta X} + \dfrac{{}^{m}V_{i,j}^{n+1} - {}^{m}V_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta Y}\right)}{2\left(\dfrac{1}{\left(\Delta X\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\Delta Y\right)^2}\right)\left(\Delta\tau\right)} = {}^{m}P_{i,j}^{n+1} + {}^{m}\left(\delta P\right)_{i,j}^{n+1} \tag{29}$$

また，速度の反復修正式は，(25)から(28)より，

$${}^{m+1}U_{i,j}^{n+1} = {}^{m}U_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta\tau}{\Delta X}\cdot{}^{m}\left(\delta P\right)_{i,j}^{n+1} \tag{30}$$

$${}^{m+1}U_{i-1,j}^{n+1} = {}^{m}U_{i-1,j}^{n+1} - \frac{\Delta\tau}{\Delta X}\cdot{}^{m}\left(\delta P\right)_{i,j}^{n+1} \tag{31}$$

$${}^{m+1}V_{i,j}^{n+1} = {}^{m}V_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta\tau}{\Delta Y}\cdot{}^{m}\left(\delta P\right)_{i,j}^{n+1} \tag{32}$$

$${}^{m+1}V_{i,j-1}^{n+1} = {}^{m}V_{i,j-1}^{n+1} - \frac{\Delta\tau}{\Delta Y}\cdot{}^{m}\left(\delta P\right)_{i,j}^{n+1} \tag{33}$$

で与えられる．m は反復回数を表す．反復してもほとんど値が変わらなくなったところで，n+1 ステップの値とする．HSMAC 法のアルゴリズムは次のようにまとめられる．

１．運動方程式(12)により，速度の予測値を計算する．ただし，圧力は，n の時刻値を用いる．

２．得られた予測速度場から(29)を用いて，圧力場を反復補正する．

３．(30), (31), (32), (33)から速度も反復補正する．

４．補正された速度場を用いて，速度の div の値を計算し，それが収束判定条件（div の値が小さいなら）を満たすなら，その値を n+1 の時刻における速度と圧力とみなし，手順 1 へ進む（時間ステップを進める）．収束判定条件を満たさないなら，手順２へ戻る．

○ HSMAC 法（付録：別の考え方）

MAC 法では，圧力に関する Poisson 方程式である(9)式を解かなければならない．これは，行列方程式を解くということである．HSMAC 法では，Newton 法を適用し，行列を解かずに済む方法である．(6)の div をとり，少し書き換えると，

$$\begin{aligned} DIV_{i,j}^{n+1} &= DIV_{i,j}^{n} + \Delta\tau\cdot\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{f}\left(\vec{U}^{n}\right)\right] \\ &+\Delta\tau\left[-\frac{P_{i+1,j}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i-1,j}^{n+1}}{\left(\Delta X\right)^2}\right] + \Delta\tau\left[-\frac{P_{i,j+1}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i,j-1}^{n+1}}{\left(\Delta Y\right)^2}\right] = 0 \end{aligned} \tag{A-1}$$

今，(A-1)を $P_{i,j}^{n+1}$ に関する関数と考える．つまり，

$$DIV_{i,j}^{n+1} = F\left(P_{i,j}^{n+1}\right) = 0$$

とする．Newton 法により，次式に従って反復計算する．

$$ {}^{m+1}P_{i,j}^{n+1} = {}^{m}P_{i,j}^{n+1} - \frac{F\left({}^{m}P_{i,j}^{n+1}\right)}{F'\left({}^{m}P_{i,j}^{n+1}\right)} = {}^{m}P_{i,j}^{n+1} + {}^{m}\left(\delta P\right)_{i,j}^{n+1} \tag{A-2} $$

ここで，m:既知，m+1:未知であり，反復回数を表す．

参考：Newton 法について

$y = f\left(x\right) = 0$ の解は，以下の式の反復計算により求まる．

$$ {}^{m+1}x = {}^{m}x - \frac{f\left({}^{m}x\right)}{f'\left({}^{m}x\right)} = {}^{m}x + {}^{m}\delta x,\ \ {}^{m}\delta x = -\frac{f\left({}^{m}x\right)}{f'\left({}^{m}x\right)} \tag{A-3} $$

(A-2)は, (A-3)において, ${}^{m}x$ の代わりに ${}^{m}P_{i,j}^{n+1}$ と置いたものに相当する. (A-2)の右辺第二項の分子は,

$$ F\left({}^{m}P_{i,j}^{n+1}\right) = {}^{m}DIV_{i,j}^{n+1} = \frac{{}^{m}U_{i,j}^{n+1} - {}^{m}U_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta X} + \frac{{}^{m}V_{i,j}^{n+1} - {}^{m}V_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta Y} \tag{A-4} $$

(A-1)より，(A-2)の右辺第二項の分母は,

$$ \frac{\partial\left(DIV_{i,j}^{n+1}\right)}{\partial P_{i,j}^{n+1}} = \frac{\partial F\left(P_{i,j}^{n+1}\right)}{\partial P_{i,j}^{n+1}} = F'\left(P_{i,j}^{n+1}\right) = 2\Delta\tau\left[\frac{1}{\left(\Delta X\right)^2} + \frac{1}{\left(\Delta Y\right)^2}\right] $$

したがって，(A-2)を書き換えると,

$$ {}^{m+1}P_{i,j}^{n+1} = {}^{m}P_{i,j}^{n+1} - \frac{{}^{m}DIV_{i,j}^{n+1}}{\frac{\partial\left(DIV_{i,j}^{n+1}\right)}{\partial P_{i,j}^{n+1}}} = {}^{m}P_{i,j}^{n+1} \underbrace{- \frac{\frac{{}^{m}U_{i,j}^{n+1} - {}^{m}U_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta X} + \frac{{}^{m}V_{i,j}^{n+1} - {}^{m}V_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta X}}{\frac{2\Delta\tau}{\left(\Delta X\right)^2} + \frac{2\Delta\tau}{\left(\Delta Y\right)^2}}}_{{}^{m}\delta P_{i,j}^{n+1}} \tag{A-5} $$

同時に, 速度 ${}^{m}U_{i,j}^{n+1}$ と ${}^{m}U_{i-1,j}^{n+1}$ は，${}^{m}\delta P_{i,j}^{n+1}$ によって修正されなければならない. テイラー展開により,

$$ {}^{m+1}U_{i,j}^{n+1} = {}^{m}U_{i,j}^{n+1} + \frac{\partial\left({}^{m}U_{i,j}^{n+1}\right)}{\partial\left({}^{m}P_{i,j}^{n+1}\right)}{}^{m}\left(\delta P\right)_{i,j}^{n+1} = {}^{m}U_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta\tau}{\Delta X}\cdot{}^{m}\left(\delta P\right)_{i,j}^{n+1} \tag{A-6} $$

$$ {}^{m+1}U_{i-1,j}^{n+1} = {}^{m}U_{i-1,j}^{n+1} + \frac{\partial\left({}^{m}U_{i-1,j}^{n+1}\right)}{\partial\left({}^{m}P_{i,j}^{n+1}\right)}{}^{m}\left(\delta P\right)_{i,j}^{n+1} = {}^{m}U_{i-1,j}^{n+1} - \frac{\Delta\tau}{\Delta X}\cdot{}^{m}\left(\delta P\right)_{i,j}^{n+1} \tag{A-7} $$

$$ {}^{m+1}V_{i,j}^{n+1} = {}^{m}V_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta\tau}{\Delta Y}\cdot{}^{m}\left(\delta P\right)_{i,j}^{n+1} \tag{A-8} $$

$$ {}^{m+1}V_{i,j-1}^{n+1} = {}^{m}V_{i,j-1}^{n+1} - \frac{\Delta\tau}{\Delta Y}\cdot{}^{m}\left(\delta P\right)_{i,j}^{n+1} \tag{A-9} $$

実際の計算では，(A-5)は計算時間の短縮をはかるために，加速係数$\omega\ (\omega>1)$を用いることが多い．

$$
{}^{m+1}P_{i,j}^{n+1} = {}^{m}P_{i,j}^{n+1} - \omega\left[{}^{m}DIV_{i,j}^{n+1} \Big/ \left(\frac{2\Delta\tau}{(\Delta X)^2} + \frac{2\Delta\tau}{(\Delta Y)^2}\right)\right] \tag{A-10}
$$

○　具体例（付録：一次元解析の場合）

ここでは，レイリー・ベナール対流を取り上げ，その線形安定性解析を考える際に現れる連立常微分方程式を MAC 系解法により解くことを考える．無次元の支配方程式（中立安定状態）は以下の通りである．

$$
kU - \frac{dW}{dZ} = 0 \tag{B-1}
$$

$$
-kP + \left(\frac{d^2}{dZ^2} - k^2\right)U = 0 \tag{B-2}
$$

$$
-\frac{dP}{dZ} + \left(\frac{d^2}{dZ^2} - k^2\right)W + Ra\,T = 0 \tag{B-3}
$$

$$
W + \left(\frac{d^2}{dZ^2} - k^2\right)T = 0 \tag{B-4}
$$

境界条件は，上下面でそれぞれ一定温度に固定され，滑り無しとする．

$$
U = W = T = 0 \quad \text{at} \quad Z = 0,1 \tag{B-5}
$$

ここで，U, W, P, T はそれぞれ水平速度成分，鉛直速度成分，圧力，温度の振幅関数（Z に依存する）である．水平方向（X 方向）には，一定な波数 k の周期性を仮定する．Ra は中立レイリー数を表し，上の連立常微分方程式の固有値になっている．今の問題では，Ra は k の値に依存して変わる．

以下，P, U および速度の発散はセル中心で，W, T はセル界面で定義される一次元（Z 方向）のスタッガード格子上で考える．

＜MAC 法＞

(B-2)を離散式で表すと，

$$
-kP_k + \frac{U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}}{(\Delta Z)^2} - k^2 U_k = 0
$$

これを整理して

$$
U_k^{new} = \frac{U_{k-1} + U_{k+1} - (\Delta Z)^2 kP_k^{new}}{2 + k^2(\Delta Z)^2} \tag{B-6}
$$

(B-3)を離散式で表すと，

$$
-\frac{P_{k+1} - P_k}{\Delta Z} + \frac{W_{k+1} - 2W_k + W_{k-1}}{(\Delta Z)^2} - k^2 W_k + Ra\,T_k = 0
$$

これを整理して

$$
W_k^{new} = \frac{W_{k-1} + W_{k+1} + (\Delta Z)^2 Ra\,T_k - (\Delta Z)\left(P_{k+1}^{new} - P_k^{new}\right)}{2 + k^2(\Delta Z)^2} \tag{B-7}
$$

(B-4)を離散化すると

$$W_k + \frac{T_{k+1} - 2T_k + T_{k-1}}{(\Delta Z)^2} - k^2 T_k = 0$$

これを整理して

$$T_k^{new} = \frac{T_{k+1} + T_{k-1} + (\Delta Z)^2 W_k}{2 + k^2 (\Delta Z)^2} \tag{B-8}$$

(B-6)と(B-7)を，(B-1)を離散化した

$$kU_k^{new} - \frac{W_k^{new} - W_{k-1}^{new}}{\Delta Z} = 0 \tag{B-9}$$

に代入すると，

$$k\frac{U_{k-1} + U_{k+1} - (\Delta Z)^2 kP_k^{new}}{2 + k^2(\Delta Z)^2} - \frac{1}{(\Delta Z)}\left(\begin{array}{l} \dfrac{W_{k-1} + W_{k+1} + (\Delta Z)^2 Ra\, T_k - (\Delta Z)\left(P_{k+1}^{new} - P_k^{new}\right)}{2 + k^2(\Delta Z)^2} \\ \quad - \dfrac{W_{k-2} + W_k + (\Delta Z)^2 Ra\, T_{k-1} - (\Delta Z)\left(P_k^{new} - P_{k-1}^{new}\right)}{2 + k^2(\Delta Z)^2} \end{array} \right) = 0$$

結局，圧力ポアソン方程式は以下のように得られる．

$$\begin{aligned} &P_{k-1}^{new} - \left\{2 + (\Delta Z)^2 k^2\right\} P_k^{new} + P_{k+1}^{new} \\ &\quad = \frac{-W_{k-2} + W_{k-1} - W_k + W_{k+1}}{(\Delta Z)} - (\Delta Z) Ra\left(T_{k-1} - T_k\right) - k\left(U_{k-1} + U_{k+1}\right) \end{aligned} \tag{B-10}$$

MAC 法のアルゴリズムは,

１．k, Ra を適宜定める．

２．(B-10)を解いて，圧力分布を得る．

３．(B-6), (B-7), (B-8)からそれぞれ U, W, T を求める．

４．Ra を修正しながら，操作２，３を繰り返す．

５．手順４で Ra が収束したら，それが初めに与えた k に対する中立の Ra となる．

６．k を変え，同様にして中立の Ra を求め，最小の Ra が得られたら，それが臨界 Ra となる．

＜SMAC 法＞

(B-6)を 2 段階に分離する．

$$U_k^{*} = \frac{U_{k-1} + U_{k+1} - (\Delta Z)^2 kP_k}{2 + k^2(\Delta Z)^2} \tag{B-11}$$

$$U_k^{new} - U_k^{*} = \frac{-(\Delta Z)^2 k(\delta P)_k}{2 + k^2(\Delta Z)^2} \tag{B-12}$$

(B-7)も 2 段階に分離する．

$$W_k^{\ *} = \frac{W_{k-1} + W_{k+1} + (\Delta Z)^2 \, Ra\, T_k - (\Delta Z)(P_{k+1} - P_k)}{2 + k^2 (\Delta Z)^2} \tag{B-13}$$

$$W_k^{\ new} - W_k^{\ *} = \frac{-(\Delta Z)\left\{(\delta P)_{k+1} - (\delta P)_k\right\}}{2 + k^2 (\Delta Z)^2} \tag{B-14}$$

連続の式に，(B-12)と(B-14)を代入すると，

$$k\left[U_k^{\ *} - \frac{(\Delta Z)^2 k (\delta P)_k}{2 + k^2(\Delta Z)^2}\right] - \frac{\left[W_k^{\ *} - \dfrac{(\Delta Z)\left\{(\delta P)_{k+1} - (\delta P)_k\right\}}{2 + k^2(\Delta Z)^2}\right] - \left[W_{k-1}^{\ *} - \dfrac{(\Delta Z)\left\{(\delta P)_k - (\delta P)_{k-1}\right\}}{2 + k^2(\Delta Z)^2}\right]}{\Delta Z} = 0$$

整理して，修正圧力に関するポアソン方程式を得る．

$$\frac{(\delta P)_{k+1} - \left\{2 + k^2(\Delta Z)^2\right\}(\delta P)_k + (\delta P)_{k-1}}{2 + k^2(\Delta Z)^2} = -\left(kU_k^{\ *} - \frac{W_k^{\ *} - W_{k-1}^{\ *}}{\Delta Z}\right) \tag{B-15}$$

SMAC 法のアルゴリズムは，

１．k, Ra を適宜定める．

２．(B-11), (B-13)からそれぞれ U*, W*を求める．

３．(B-15)を解いて，修正圧力分布を得る．

４．(B-12), (B-14), (B-8)からそれぞれ U^{new}, W^{new}, T^{new} を求める．

５．Ra を修正しながら，操作２－４を繰り返す．

６．手順５で Ra が収束したら，それが初めに与えた k に対する中立の Ra となる．

７．k を変え，同様にして中立の Ra を求め，最小の Ra が得られたら，それが臨界 Ra となる．

＜HSMAC 法＞

(B-15)において，$(\delta P)_k$ の隣接点の圧力補正量を落としてしまえば，次式が得られる．

$$(\delta P)_k = kU_k^{\ *} - \frac{W_k^{\ *} - W_{k-1}^{\ *}}{\Delta Z} = P_k^{\ new} - P_k \tag{B-16}$$

速度の修正量は，(B-12), (B-14)より，

$$U_k^{\ new} - U_k^{\ *} = (\delta U)_k = \frac{-(\Delta Z)^2}{2 + k^2(\Delta Z)^2} k (\delta P)_k \tag{B-17}$$

$$W_k^{\ new} - W_k^{\ *} = (\delta W)_k = \frac{-(\Delta Z)^2}{2 + k^2(\Delta Z)^2} \frac{\cancel{(\delta P)_{k+1}} - (\delta P)_k}{(\Delta Z)} = \frac{(\Delta Z)^2}{2 + k^2(\Delta Z)^2} \frac{(\delta P)_k}{(\Delta Z)} \tag{B-18}$$

$$W_{k-1}{}^{new} - W_{k-1}{}^{*} = \left(\delta W\right)_{k-1} = \frac{-\left(\Delta Z\right)^2}{2+k^2\left(\Delta Z\right)^2}\frac{\left(\delta P\right)_k - \cancel{\left(\delta P\right)_{k-1}}}{\left(\Delta Z\right)} = -\frac{\left(\Delta Z\right)^2}{2+k^2\left(\Delta Z\right)^2}\frac{\left(\delta P\right)_k}{\left(\Delta Z\right)} \tag{B-19}$$

なお，(B-18), (B-19)においては隣接点を落とした．圧力の反復修正式は，(B-16)より，

$$ {}^{m+1}P_k{}^{new} = {}^{m}P_k{}^{new} + \underbrace{k\,{}^{m}U_k{}^{new} - \frac{{}^{m}W_k{}^{new} - {}^{m}W_{k-1}{}^{new}}{\Delta Z}}_{{}^{m}\left(\delta P\right)_k{}^{new}} \tag{B-20}$$

また，速度の反復修正式は，(B-17), (B-18), (B-19)より，

$$ {}^{m+1}U_k{}^{new} = {}^{m}U_k{}^{new} - \underbrace{\frac{\left(\Delta Z\right)^2}{2+k^2\left(\Delta Z\right)^2}}_{\Delta\tau} k\,{}^{m}\left(\delta P\right)_k{}^{new} \tag{B-21}$$

$$ {}^{m+1}W_k{}^{new} = {}^{m}W_k{}^{new} + \underbrace{\frac{\left(\Delta Z\right)^2}{2+k^2\left(\Delta Z\right)^2}}_{\Delta\tau} \frac{{}^{m}\left(\delta P\right)_k{}^{new}}{\left(\Delta Z\right)} \tag{B-22}$$

$$ {}^{m+1}W_{k-1}{}^{new} = {}^{m}W_{k-1}{}^{new} - \underbrace{\frac{\left(\Delta Z\right)^2}{2+k^2\left(\Delta Z\right)^2}}_{\Delta\tau} \frac{{}^{m}\left(\delta P\right)_k{}^{new}}{\left(\Delta Z\right)} \tag{B-23}$$

で与えられる．反復してもほとんど値が変わらなくなったところで，*new* の値とする．

HSMAC 法のアルゴリズムは次のようにまとめられる．

１．k, Ra を適宜定める．

２．(B-11), (B-13)からそれぞれ U^*, W^*を求める．

３．収束するまで，(B-20), (B-21), (B-22), (B-23)を同時に反復修正計算し，圧力と速度を求める．

４．(B-8)から T^{new} を求める．

５．Ra を修正しながら，操作２－４を繰り返す．

６．手順５で Ra が収束したら，それが初めに与えた k に対する中立の Ra となる．

７．k を変え，同様にして中立の Ra を求め，最小の Ra が得られたら，それが臨界 Ra となる．