

Hartmann 流れ

§1 Maxwell の方程式

Feynman 物理学によると，Maxwell の方程式は以下の4つの式で与えられる．

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon} \quad (\text{Gauss の法則}) \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Faraday の法則}) \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{磁荷不在の法則}) \quad (3)$$

$$c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Ampère-Maxwell の法則}) \quad (4)$$

電荷保存則は，次式で与えられる．

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \quad (5)$$

式(5)は Maxwell の方程式とは独立ではない．それを以下に示す．まず，光速 c や誘電率 ε が定数として，式(4)の発散をとれば，

$$c^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}{\varepsilon} + \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t}$$

この式の左辺は恒等的にゼロであるので，式(1)を代入して，

$$\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_e}{\varepsilon} \right) = 0$$

これより，式(5)が得られるのがわかる．

§2 Ohm の法則と Lorentz 力

電磁流体力学 (Magnetohydrodynamics) を考える場合，Ohm の法則により電流密度が与えられる．

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) + \rho_e \vec{u} \quad (6)$$

この Ohm の法則において，ホール効果は考慮されていない．ここで， σ は電気伝導率を表す．右辺の第一項は伝導電流密度を，第二項は対流電流密度を表す．通常，対流電流は伝導電流よりもずっと小さく無視されるが，電荷密度がゼロを意味するものではない．この伝導電流は，磁場中で動く導体に流れる電流密度を表している．

式(4)において，右辺の電流密度 \vec{j} と電場の時間微分 (変位電流とよばれる) を比べると，MHD 近似においては，変位電流は伝導電流よりもずっと小さく通常無視される．したがって，次式で与えられる

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_m \vec{j}, \quad \left(\mu_m \equiv \frac{1}{\varepsilon c^2} \right) \quad (\text{Ampère の法則}) \quad (7)$$

ここで、 μ_m は透磁率と呼ばれる。

電磁場と流れ場の相互作用を考えるのが電磁流体力学であるが、電磁場から流れ場への影響については電磁力が流体に作用することに起因する。この電磁力は Lorentz 力と呼ばれ、次式で与えられる（誘電体や磁性体に作用する力は無視する場合）。

$$\vec{f}_{em} = \vec{j} \times \vec{B} + \rho_e \vec{E} \quad (8)$$

右辺第二項は Coulomb 力と呼ばれることもあるが、第一項に比べ十分に小さく無視される。

§3 磁場の誘導方程式

式(6)と式(7)から電流密度 \vec{j} を消去すると、

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_m \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

透磁率 μ_m や導電率 σ を定数とみなし、両辺の回転をとると、

$$\frac{1}{\mu_m \sigma} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B})$$

ベクトル演算公式を利用し、右辺に式(2)を代入して、

$$\frac{1}{\mu_m \sigma} [\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B})$$

式(3)を代入し、整理すると

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \nu_m \nabla^2 \vec{B}, \quad \left(\nu_m = \frac{1}{\mu_m \sigma} \right) \quad (9)$$

式(9)を磁場の誘導方程式という。さらにベクトル演算公式

$$\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{u} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \vec{B}$$

を用いれば、非圧縮流れの場合には、式(9)は以下のようにも書き換えられる。

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \nu_m \nabla^2 \vec{B} \quad (10)$$

流体の方程式である Navier-Stokes 方程式（あるいは Euler 方程式など）から解けが得られている場合には速度 \vec{u} が既知であるので、この方程式を解いて、磁束密度 \vec{B} を求め、さらに式(7)により磁束密度 \vec{B} の回転である \vec{j} を求めれば、式(8)で与えられる Lorentz 力を計算することができる。ここで、誘導方程式の各項の比を取ってみよう。

$$\frac{\text{対流項}}{\text{拡散項}} = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}}{\nu_m \nabla^2 \vec{B}} \cong \frac{UL}{\nu_m} \equiv Re_m \quad (11)$$

Re_m は、磁気 Reynolds 数と呼ばれる。

$$\frac{\text{時間項}}{\text{拡散項}} = \frac{\partial \vec{B} / \partial t}{\nu_m \nabla^2 \vec{B}} \cong \frac{\omega L^2}{\nu_m} = R_\omega \quad (12)$$

R_ω は、シールディングパラメータ または 磁気 Womersley 数と呼ばれる。ここで、

ω は角振動数である。半導体結晶成長や鉄鋼業における連続鋳造プロセスのような工学に関わる電磁流体問題では、流体の導電率から推定される磁気粘性係数 ν_m が 1 程度の値を持つために、磁気 Reynolds 数は 1 よりずっと小さい場合がほとんどである。また高周波の磁場を印加しない限りは、磁気 Womersley 数も 1 よりずっと小さい場合が多い。したがって、磁気拡散が支配的ということになり、式(10)は次式で近似される。

$$\nabla^2 \vec{B} = \vec{0} \quad (13)$$

このように Laplace 方程式に帰着される場合、磁場は印加磁場から変形しない。式(13)で規定される磁場 \vec{B} は渦無し分布（磁場の回転がゼロ）を持つので、式(7)の Ampère の法則から電流を求めることができない。したがって、Ohm の法則から電流を求める必要がある。

§4 ベクトルポテンシャルとスカラポテンシャル

式(3)を恒等的に満たすように、ベクトルポテンシャル \vec{A} を導入する。

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (14)$$

これを式(2)に代入し整理すると、

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

ベクトル恒等式から、次のようにスカラポテンシャル ϕ を定義できる。

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi$$

したがって、電場は以下のようにベクトルポテンシャルとスカラポテンシャルを用いて表すことができる。

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (15)$$

この式を Ohm の法則に代入すると、

$$\vec{j} = \sigma \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{u} \times \vec{B} \right) \quad (16)$$

電流密度はこのように与えられることがわかる。さらに、電流密度 \vec{j} は式(7)の発散をとることにより、次式を得る。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (17)$$

式(16), 式(17)より

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) = 0$$

ベクトルポテンシャル \vec{A} に対して、Coulomb ゲージ ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$) を用いれば、次の Poisson 方程式を得る。

$$\nabla^2 \phi = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \quad (18)$$

この式を解けば，スカラポテンシャル（電位）が得られる．式(1)はここまで用いていないが，これは電荷密度を得るための式と解釈できる．ただし，前述のように電荷密度が得られても，対流電流は伝導電流に比べて十分に小さいので，無視される．したがって，式(1)を用いて，わざわざ電荷密度を求める必要性は生じない．

式(16)の右辺の第二項にあるベクトルポテンシャルの時間微分項は，移動磁場や回転磁場などの交流磁場が与えられる場合には，式(14)を満たすようにベクトルポテンシャル \vec{A} を与えればよい．

§5 Navier-Stokes 方程式と誘導方程式の比較

式(6)と式(7)から電流密度 \vec{j} を消去し，式(14)，式(15)を代入すれば，次式を得る．

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_m \sigma \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right)$$

Coulomb ゲージを考慮して，これを整理すれば，次式を得る．

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi + \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \nu_m \nabla^2 \vec{A} \quad (19)$$

この式の両辺に対して回転をとったものが，式(9)である．

表 1 は，非圧縮性 Navier-Stokes 方程式と誘導方程式を比較したものである．

Table 1 Comparison of the equations between the Navier-Stokes equation and the induced equation with the Coulomb gauge.

	Navier-Stokes 方程式	誘導方程式
\vec{u} or \vec{A}	$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$
	$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\vec{f}}{\rho}$	$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi + \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \nu_m \nabla^2 \vec{A}$
$\vec{\omega}$ or \vec{B}	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
	$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) + \nu \nabla^2 \vec{\omega} + \vec{\nabla} \times \frac{\vec{f}}{\rho}$	$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \nu_m \nabla^2 \vec{B}$

Navier-Stokes 方程式の移流項は，次式

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \quad (20)$$

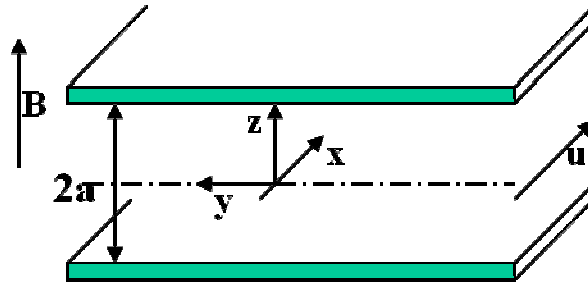
を利用して，誘導方程式と同形の式に変形することもできる．

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p' + \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\vec{f}}{\rho}, \quad \left(p' = p + \frac{\rho \vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \right) \quad (21)$$

§6 一様磁場印加下におけるダクト内の一方向流れ

例題：図に示されるように，流れ方向に x 軸，スパン方向に y 軸，鉛直方向に z 軸の矩形ダクトの中を， x 軸方向の圧力勾配により導電性流体が駆動されている． z 軸方

向に一樣な静磁場 $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ が印加されており，誘導磁場は無視できるものとして考える．流れは定常で，流れ方向の速度および電位の勾配は無いものと仮定する．壁面は滑りなしで電気絶縁とする．さらに，密度 ρ ，動粘度 ν ，導電率 σ は定数とする．基礎式および解析手法を示し，磁場強度に応じた速度分布を求めよ．



解：支配方程式は連続の式，運動方程式，Ohmの法則，電荷保存則であり，それぞれ以下のように表される．

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{j} \times \vec{B} \\ \vec{j} &= \sigma (-\vec{\nabla} \phi + \vec{u} \times \vec{B}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= 0\end{aligned}$$

問題文にある条件から，成分表示で以下のように書きなおされる．

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho} (j_y B_0) \quad (22)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} (-j_x B_0) \quad (23)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (24)$$

$$j_x = \sigma \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right), \quad j_y = \sigma \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y} - u B_0 \right), \quad j_z = \sigma \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (25)$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \quad (26)$$

仮定より，式(25)の最初の式から， x 方向の電流はゼロである．式(23)の電磁力はゼロになる．したがって，式(23), (24)から圧力は x のみの関数であり，一定の圧力勾配となる．まとめると，以下の3式を同時に解くことになる． G は重力加速度と同じ次元をもつ圧力勾配と定義する．

$$0 = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}}_G + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho} (j_y B_0) \quad (27)$$

$$j_y = \sigma \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y} - u B_0 \right), \quad j_z = \sigma \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (28)$$

$$\frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \quad (29)$$

あるいは、電流密度を消去して、以下の2式を解くようにすることもできる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\sigma B_0}{\mu} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + u B_0 \right) + \frac{G}{\nu} = 0 \quad (\text{運動方程式}) \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -B_0 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{電位の Poisson 方程式}) \quad (31)$$

境界条件は、以下のように与えられる。ただし、y方向のダクト幅を2lとする。

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \pm l: \quad u = 0, \quad j_y = 0, \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \right) \\ z = \pm a: \quad u = 0, \quad j_z = 0, \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \right) \end{array} \right. \quad (32)$$

式(30), (31)を使って解析する場合には、電位勾配が壁面でゼロになるように与える。一方で、式(27), (28), (29)を使う場合は、電流密度の法線方向がゼロになるように与えられる。式(30), (31)を使う場合には、どちらも Poisson 方程式（楕円型方程式）になっているので、仮想時間項を導入し、拡散方程式（放物型方程式）になおして、定常解が得られるまで反復計算するのが最も簡単であろう。式(27), (28), (29)を使う場合は、式(27)の左辺に仮想時間項を導入し、電流密度と電位の解法については HSMAC 法を使うのを推奨する。

HSMAC 法について

スタaggered格子上で離散化すると、以下のように書ける。ただし、速度成分と電位はセル中心で、電流密度はセル界面で与えるものとする。

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} = G + \nu \left(\frac{u_{j+1,k}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \frac{u_{j,k+1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} \right) + \frac{B_0}{\rho} \left(\frac{j_{y,j,k}^{n+1} + j_{y,j-1,k}^{n+1}}{2} \right) \quad (33)$$

$$j_{y,j,k}^{n+1} = \sigma \left(-\frac{\phi_{j+1,k}^n - \phi_{j,k}^n}{\Delta y} - u_{j,k}^n B_0 \right), \quad j_{z,j,k}^{n+1} = \sigma \left(-\frac{\phi_{j,k+1}^n - \phi_{j,k}^n}{\Delta z} \right) \quad (34)$$

したがって、反復修正式は

$${}^{m+1}\phi_{j,k}^{n+1} = {}^m\phi_{j,k}^{n+1} + {}^m(\delta\phi)_{j,k}^{n+1} = {}^m\phi_{j,k}^{n+1} - \frac{\frac{j_{y,j,k}^{n+1} - j_{y,j-1,k}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{j_{z,j,k}^{n+1} - j_{z,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z}}{2\sigma \left[1/(\Delta y)^2 + 1/(\Delta z)^2 \right]} \quad (35)$$

$${}^{m+1}j_{y,j,k}^{n+1} = j_{y,j,k}^{n+1} + \frac{\sigma}{\Delta y} \cdot {}^m(\delta\phi)_{j,k}^{n+1} \quad (36)$$

$${}^{m+1}j_{y,j-1,k}^{n+1} = j_{y,j-1,k}^{n+1} - \frac{\sigma}{\Delta y} \cdot {}^m(\delta\phi)_{j,k}^{n+1} \quad (37)$$

$${}^{m+1}j_{z,j,k}^{n+1} = j_{z,j,k}^{n+1} + \frac{\sigma}{\Delta z} \cdot {}^m(\delta\phi)_{j,k}^{n+1} \quad (38)$$

$${}^{m+1}j_{z,j,k-1}^{n+1} = j_{z,j,k-1}^{n+1} - \frac{\sigma}{\Delta z} \cdot {}^m(\delta\phi)_{j,k}^{n+1} \quad (39)$$

となる。

無次元化するとわかることだが、この問題では唯一 Hartmann 数と呼ばれる無次元数が現れる。定義は以下のとおりである。

$$Ha = B_0 a \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} \quad (40)$$

以下は、ダクトの断面が正方形の時の結果を示す。Hartmann 数が大きくなると、印加磁場方向に直交する壁面近傍に電流が集中する薄い領域が存在する。これは Hartmann 境界層とよばれる。

解析結果

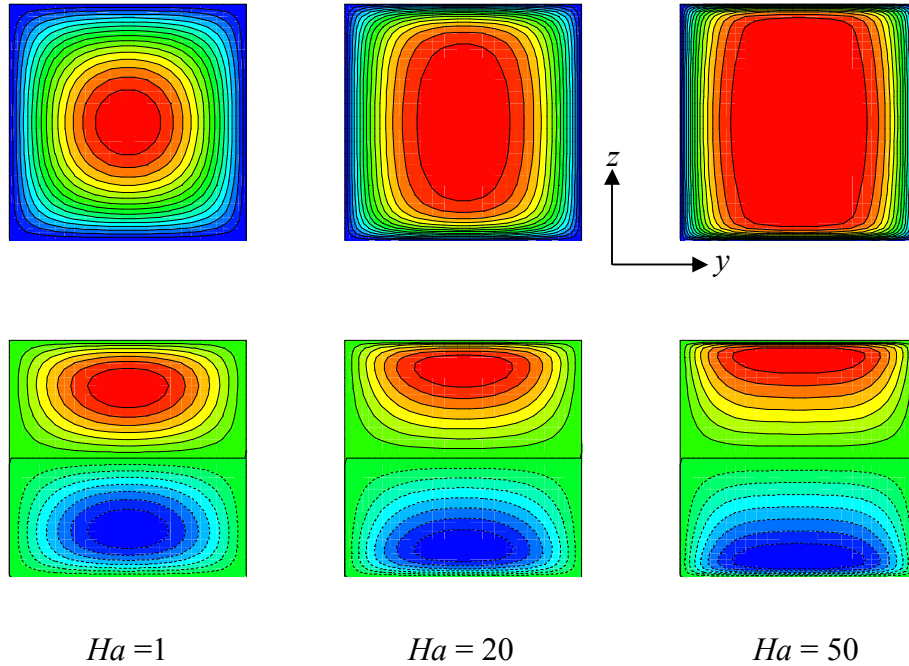
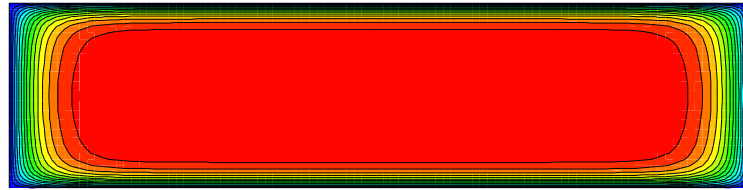


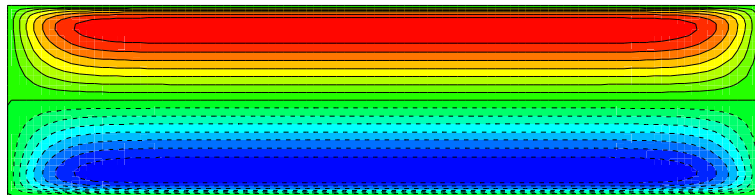
Figure 1 Contour lines of velocity (upper ones) and stream line of electric current density (lower ones). The uniform magnetic field is applied in the vertical direction.

Hartmann 流れ (一次元解析)

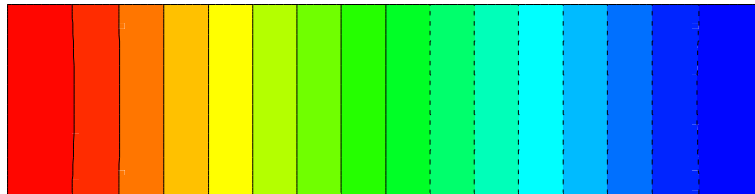
図2は、 y 方向に長い矩形断面のダクト内の電磁流体流れを示す。上から、 x 方向の速度成分、電流の流線、電位を示す。ただし、 $y =$ 一定面 (図における左右の壁) は電気絶縁の場合である。この図からわかるように、ダクト断面が横長になれば、左右の壁面が遠い中央の領域では、一次元解析が可能となる。



Contour of velocity



Stream lines of electric current density



Contour of electric potential

Figure 2 Contour lines of velocity, stream lines of electric current density and electric potential. The uniform magnetic field is applied in the vertical direction at $Ha = 20$ and the aspect ratio = 4.

ダクトのアスペクト比 (y/z) が ∞ に漸近するとき、つまり y 方向に無限に長く流れの y 方向勾配が無い場合を想定する。電流は y 方向にのみ流れ (z 方向の電位勾配をゼロ)、式(30), (31)において、速度の y 方向勾配をゼロと置くと、以下の式を得る。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\sigma B_0}{\mu} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + u B_0 \right) + \frac{G}{\nu} = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (42)$$

式(42)を y で積分して、

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = C = \text{const} \quad (43)$$

これを式(41)に代入すると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho\nu}\right)u(z) = \frac{\sigma B_0 C}{\rho\nu} - \frac{G}{\nu} \quad (44)$$

式(44)で C を y 方向の電場 E で置き換える.

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho\nu}u = -\left(\frac{\sigma B_0 E}{\rho\nu} + \frac{G}{\nu}\right) \quad (45)$$

この非同次2階常微分方程式の解は、この方程式の特解

$$u_{sp} = \frac{\rho\nu}{\sigma B_0^2} \left(\frac{\sigma B_0 E}{\rho\nu} + \frac{G}{\nu}\right) = \frac{E}{B_0} + \frac{\rho G}{\sigma B_0^2} \quad (46)$$

と同次方程式

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho\nu}u = 0 \quad (47)$$

の一般解の和として表される. 式(47)の同次解は、二つの定数 A, B を用いて

$$u = A \exp\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 z\right) + B \exp\left(-\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 z\right) \quad (48)$$

と表されるので、式(45)の一般解は、

$$u = A \exp\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 z\right) + B \exp\left(-\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 z\right) + \frac{E}{B_0} + \frac{\rho G}{\sigma B_0^2} \quad (49)$$

となる. 次に境界条件から二つの定数を決定する. 今、 z 座標の原点を、平板間のちょうど中点にとり、平板位置を $\pm a$ とする.

$$u(a) = A \exp\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 a\right) + B \exp\left(-\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 a\right) + \frac{E}{B_0} + \frac{\rho G}{\sigma B_0^2} = 0$$

$$u(-a) = A \exp\left(-\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 a\right) + B \exp\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 a\right) + \frac{E}{B_0} + \frac{\rho G}{\sigma B_0^2} = 0$$

両式より、

$$A = B = \frac{-\left(\frac{E}{B_0} + \frac{\rho G}{\sigma B_0^2}\right)}{2 \cosh\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 a\right)}, \quad u = \frac{-\left(\frac{E}{B_0} + \frac{\rho G}{\sigma B_0^2}\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 a\right)} \cosh\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 z\right) + \frac{E}{B_0} + \frac{\rho G}{\sigma B_0^2}$$

結局

$$u(z) = \underbrace{\left(\frac{E}{B_0} + \frac{\rho G}{\sigma B_0^2} \right)}_{u_{sp}} \left[1 - \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 z\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 a\right)} \right] \quad (50)$$

$$u(z) = u_{sp} \left[1 - \frac{\cosh(Ha \cdot \eta)}{\cosh(Ha)} \right], \quad \left(Ha \equiv \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 a, \quad \eta \equiv \frac{z}{a} \right) \quad (51)$$

Ha はハルトマン数 (Hartmann number) と呼ばれる. その自乗値は電磁力と粘性力の比を表す. この時点では, まだ定数 E の値が定まっていない. これは, $y =$ 一定面における電氣的境界条件に依存する. まずは, 準備として, 式(50)により与えられる速度分布の平均値を計算しよう.

$$u_{ave} = \frac{1}{a} \int_0^a u(z) dz = \frac{1}{a} \int_0^a u_{sp} \left[1 - \frac{\cosh(Ha \cdot \eta)}{\cosh(Ha)} \right] dz = u_{sp} \left[1 - \frac{\tanh(Ha)}{Ha} \right] \quad (52)$$

電流密度の平均値については, オームの法則から求められる. 式(28)から,

$$j_y = \sigma(E - uB_0) \quad (53)$$

$$j_y|_{ave} = \frac{1}{a} \int_0^a j_y(z) dz = \frac{1}{a} \int_0^a \sigma(E - uB_0) dz = \sigma(E - B_0 u_{ave}) \quad (54)$$

ここから, $y =$ 一定の壁面の電氣境界条件により場合分けを行う.

○ 絶縁壁

電流の平均値 $j_y|_{ave}$ がゼロになることより, 次式を得る.

$$E - B_0 u_{ave} = 0, \quad \therefore E = B_0 u_{sp} \left[1 - \frac{\tanh(Ha)}{Ha} \right]$$

つまり,

$$E = B_0 \left(\frac{E}{B_0} + \frac{\rho G}{\sigma B_0^2} \right) \left[1 - \frac{\tanh(Ha)}{Ha} \right]$$

これを E について計算すると,

$$E = \frac{\rho G}{\sigma B_0} \left(\frac{Ha}{\tanh(Ha)} - 1 \right) \quad (55)$$

式(55)を式(51)に代入,

$$u(z) = \left(\frac{E}{B_0} + \frac{\rho G}{\sigma B_0^2} \right) \left[1 - \frac{\cosh(Ha \cdot \eta)}{\cosh(Ha)} \right] = \frac{Ga^2}{\nu} \frac{\overbrace{\rho\nu}^{Ha^{-2}}}{\sigma B_0^2 a^2} \frac{Ha}{\tanh(Ha)} \left[1 - \frac{\cosh(Ha \cdot \eta)}{\cosh(Ha)} \right]$$

$$\therefore u_{ins}(z) = \frac{Ga^2}{\nu} \frac{1}{Ha \cdot \tanh(Ha)} \left[1 - \frac{\cosh(Ha \cdot \eta)}{\cosh(Ha)} \right] \quad (56)$$

○ 完全導電壁

電場 E がゼロになることにより,

$$u(z) = \left(\frac{E}{B_0} + \frac{\rho G}{\sigma B_0^2} \right) \left[1 - \frac{\cosh(Ha \cdot \eta)}{\cosh(Ha)} \right] = \frac{Ga^2}{\nu} \frac{\rho \nu}{\sigma B_0^2 a^2} \left[1 - \frac{\cosh(Ha \cdot \eta)}{\cosh(Ha)} \right]$$

$$\therefore u_{cond}(z) = \frac{Ga^2}{\nu} \frac{1}{Ha^2} \left[1 - \frac{\cosh(Ha \cdot \eta)}{\cosh(Ha)} \right] \quad (57)$$

○ 絶縁壁と導電壁の比較

ここで, $Ha \gg 1$ においては, 以下の式が成立するから,

$$\lim_{Ha \rightarrow \infty} \tanh(Ha) = \lim_{Ha \rightarrow \infty} \frac{e^{Ha} - e^{-Ha}}{e^{Ha} + e^{-Ha}} = 1 \quad (58)$$

式(56)と式(57)を比べると, Ha 倍だけ速度の大きさが異なる. これはハルトマン数が十分に大きい場合には, 完全導電壁は絶縁壁の場合と比べて Ha 倍, 対流抑制効果が大きいのがわかる. 以下の表に比較結果をまとめる.

Table 2 Comparison of the averaged current density, electric field and velocity

	絶縁壁	完全導電壁
平均電流密度	$j_y _{ave} = 0$	$j_y _{ave} = -\frac{\rho G}{B_0} \left[1 - \frac{\tanh(Ha)}{Ha} \right]$
電場	$E = -\frac{\rho G}{\sigma B_0} \left(1 - \frac{Ha}{\tanh(Ha)} \right)$	$E = 0$
無次元速度	$U = \frac{1}{Ha \cdot \tanh(Ha)} \left[1 - \frac{\cosh(Ha \cdot \eta)}{\cosh(Ha)} \right]$	$U = \frac{1}{Ha^2} \left[1 - \frac{\cosh(Ha \cdot \eta)}{\cosh(Ha)} \right]$

図3には, 速度分布の比較を示す. 同じハルトマン数であっても導電壁の方が絶縁壁の場合よりも流れの抑制効果 (電磁ブレーキ) が大きいことがわかる.

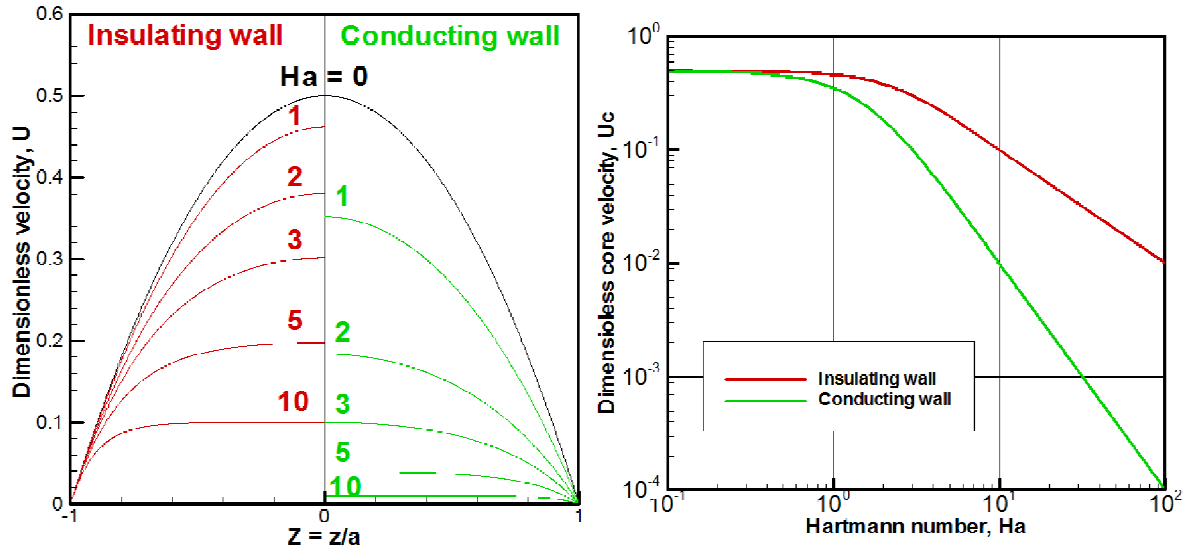


Figure 3 Comparison of the velocity profile (left) and core velocity (right) between the insulating walls and perfectly conducting walls for various values of the Hartmann number.

○ $Ha \ll 1$ の場合

印加される磁場が十分に小さければ，式(56)あるいは式(57)で得られた速度分布は，平面ポアズイユ流れの速度分布に一致するはずである．導電壁の場合について，それを確かめる．

$$U_{cond} = \frac{u_{cond}}{Ga^2/\nu} = \frac{1}{Ha^2} \left[1 - \frac{\cosh(Ha \cdot \eta)}{\cosh(Ha)} \right] \quad (59)$$

次の関係が成り立つ．

$$e^{Ha} = 1 + Ha + \frac{1}{2!} Ha^2 + \frac{1}{3!} Ha^3 + \dots + \frac{1}{n!} Ha^n + \dots$$

$$\therefore \cosh(Ha) = \frac{e^{Ha} + e^{-Ha}}{2} \cong 1 + \frac{1}{2!} Ha^2 + \frac{1}{4!} Ha^4$$

式(59)において， \cosh の第二項まで使って近似すると，

$$U_{cond} \cong \frac{1}{Ha^2} \left[1 - \frac{1 + \frac{1}{2} Ha^2 \eta^2}{1 + \frac{1}{2} Ha^2} \right] = \frac{1}{2} (1 - \eta^2) \quad (\text{for } Ha \ll 1) \quad (60)$$

なお，絶縁壁の結果を使った場合でも， $Ha \ll 1$ においては，以下の式が成立するから，

$$\lim_{Ha \rightarrow 0} \frac{Ha^2}{Ha \cdot \tanh(Ha)} = \lim_{Ha \rightarrow 0} \frac{Ha(e^{Ha} + e^{-Ha})}{e^{Ha} - e^{-Ha}} = \lim_{Ha \rightarrow 0} \frac{Ha \left(1 + \frac{1}{2!} Ha^2 + \dots \right)}{Ha + \frac{1}{3!} Ha^3 + \dots} = 1 \quad (61)$$

結果は式(60)に一致するのが確認できる．

誘導磁場について

ハルトマン流れの場合について，ここまで無視してきたが，誘導磁場を考察する．式(10)において，定常でかつ u 以外の速度成分はゼロ，さらに z 方向以外の勾配をゼロとすれば，次式を得る．

$$0 = B_z \frac{\partial u}{\partial z} + \nu_m \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} \quad (62)$$

$$0 = \nu_m \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} \quad (63)$$

$$0 = \nu_m \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \quad (64)$$

今，磁場を印加磁場と誘導磁場に分けて考える．つぎのように置く．

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b} = B_0 \vec{e}_z + \vec{b} = (b_x, b_y, B_0 + b_z) \quad (65)$$

式(65)を式(62), (63), (64)に代入すると，それぞれ次式を得る．

$$\frac{\partial^2 b_x}{\partial z^2} + \frac{1}{\nu_m} \frac{du}{dz} (B_0 + b_z) = 0 \quad (66)$$

$$\frac{\partial^2 b_y}{\partial z^2} = 0 \quad (67)$$

$$\frac{\partial^2 b_z}{\partial z^2} = 0 \quad (68)$$

●絶縁壁の場合： 式(66)だけを解くことを考える．式(56)から，

$$\frac{du}{dz} = -\frac{Ga^2}{\nu} \frac{1}{\tanh(Ha)} \left[\frac{\sinh(Ha \cdot \eta)}{\cosh(Ha)} \right] \frac{d\eta}{dz} = -\frac{Ga}{\nu} \frac{\sinh(Ha \cdot \eta)}{\sinh(Ha)} \quad (69)$$

z 成分の誘導磁場 b_z を無視して

$$\frac{d^2 b_x}{dz^2} = \frac{B_0 Ga}{\nu \nu_m \sinh(Ha)} \sinh\left(Ha \cdot \frac{z}{a}\right) \quad (70)$$

積分すると，

$$\frac{db_x}{dz} = \frac{B_0 Ga}{\nu \nu_m \sinh(Ha)} \frac{a}{Ha} \cosh\left(\frac{Ha}{a} z\right) + C_1 \quad (71)$$

もう一度積分すると，

$$b_x = \frac{B_0 Ga}{\nu \nu_m \sinh(Ha)} \left(\frac{a}{Ha}\right)^2 \sinh\left(\frac{Ha}{a} z\right) + C_1 z + C_2 \quad (72)$$

誘導磁場成分 b_x に対する境界条件は

$$b_x(z = \pm a) = 0 \quad (73)$$

とすると，以下のように定数は求まる．

$$\therefore C_1 = -\frac{B_0 G}{\nu \nu_m \sinh(Ha)} \left(\frac{a}{Ha}\right)^2 \sinh(Ha), \quad C_2 = 0 \quad (74)$$

よって、誘導磁場は

$$\begin{aligned} b_x &= \frac{B_0 G a}{\nu \nu_m \sinh(Ha)} \left(\frac{a}{Ha}\right)^2 \sinh\left(\frac{Ha}{a} z\right) - \frac{B_0 G}{\nu \nu_m \sinh(Ha)} \left(\frac{a}{Ha}\right)^2 \sinh(Ha) \cdot z \\ &= \frac{B_0 G a^3}{\nu \nu_m Ha^2} \left[\frac{\sinh(Ha \cdot \eta)}{\sinh(Ha)} - \eta \right] \end{aligned}$$

したがって、無次元の誘導磁場成分は、無次元数を使って、次のように書ける。

$$\frac{b_x}{B_0} = \frac{Re_m}{Ha^2} \left[\frac{\sinh(Ha \cdot \eta)}{\sinh(Ha)} - \eta \right] = \underbrace{\frac{Ga^3}{\nu^2}}_{Re} \frac{Pr_m}{Ha^2} \left[\frac{\sinh(Ha \cdot \eta)}{\sinh(Ha)} - \eta \right] \quad (75)$$

ここで、無次元数などは、次式で定義する。

$$Re_m = \frac{Ga^3/\nu}{\nu_m} = \frac{u_{sp0} a}{\nu_m} = Re Pr_m, \quad Pr_m = \frac{\nu}{\nu_m} = \sigma \mu_m \nu, \quad u_{sp0} = \frac{Ga^2}{\nu} \quad (76)$$

u_{sp0} は磁場が印加されないときの最大速度（コア速度）である。これを代表速度とし

たときの磁気レイノルズ数 Re_m および磁気プラントル数 Pr_m を定義することにより、式(75)のように誘導磁場の大きさを与えることができる。ハルトマン流れでは、誘導磁場成分の大きさは磁気プラントル数に比例することがわかる。

図4には、 x 方向の誘導磁場を可視化したものを示す。

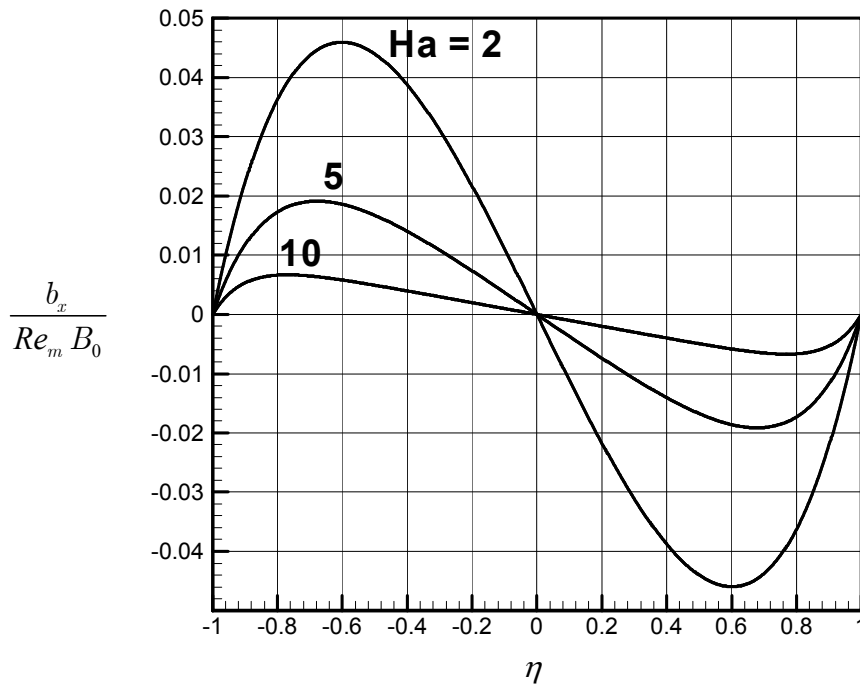


Figure 4 Induced magnetic field for the x -directional component for several values of the Hartmann number.

●導電壁の場合：式(57)から，

$$\frac{du}{dz} = -\frac{Ga}{\nu} \frac{\sinh(Ha \cdot \eta)}{Ha \cdot \cosh(Ha)}$$

であるから，式(66)に代入して，

$$\frac{d^2 b_x}{dz^2} = \frac{B_0 Ga}{\nu_m \nu} \frac{\sinh\left(\frac{Ha}{a} z\right)}{Ha \cdot \cosh(Ha)}$$

二度積分して，

$$b_x = \frac{B_0 Ga}{\nu_m \nu} \left(\frac{a}{Ha}\right)^2 \frac{\sinh\left(\frac{Ha}{a} z\right)}{Ha \cdot \cosh(Ha)} + C_3 z + C_4$$

誘導磁場成分 b_x に対する境界条件は

$$b_x(z = \pm a) = 0$$

とすると，

$$C_3 = -\frac{B_0 G}{\nu_m \nu} \left(\frac{a}{Ha}\right)^2 \frac{\sinh(Ha)}{Ha \cdot \cosh(Ha)}, \quad C_4 = 0$$

したがって，

$$\begin{aligned} b_x &= \frac{B_0 Ga}{\nu_m \nu} \left(\frac{a}{Ha}\right)^2 \frac{\sinh\left(\frac{Ha}{a} z\right)}{Ha \cdot \cosh(Ha)} - \frac{B_0 G}{\nu_m \nu} \left(\frac{a}{Ha}\right)^2 \frac{\sinh(Ha)}{Ha \cdot \cosh(Ha)} z \\ &= \frac{B_0 Ga^3 \tanh(Ha)}{\nu_m \nu Ha^3} \left[\frac{\sinh(Ha \cdot \eta)}{\sinh(Ha)} - \eta \right] \end{aligned}$$

$$\frac{b_x}{B_0} = Re Pr_m \frac{\tanh(Ha)}{Ha^3} \left[\frac{\sinh(Ha \cdot \eta)}{\sinh(Ha)} - \eta \right] \quad (77)$$

最後に，式(75)または式(77)において， $Ha \ll 1$ の極限を考える．

$$\frac{b_x}{B_0} \cong \frac{Re Pr_m}{Ha^2} \left(\frac{Ha\eta + \frac{1}{3!} Ha^3 \eta^3}{Ha + \frac{1}{3!} Ha^3} - \eta \right) \cong \frac{Re Pr_m}{3! Ha^2} \left(\frac{Ha^3 \eta^3 - Ha^3 \eta}{Ha} \right) = \frac{Re Pr_m}{6} (\eta^3 - \eta)$$

であるから，

$$\frac{b_x}{B_0 Re_m} = \frac{1}{6} (\eta^3 - \eta), \quad (\text{for } Ha \ll 1) \quad (78)$$

となる．