

鉛直加熱平板の自然対流の相似解について

1. はじめに

鉛直平板を等熱流束加熱したときの自然対流熱伝達について、プラントル数がゼロから無限大まで流れ場と温度場の相似性が成り立つものとして考える。Hellums & Churchillの方法によりプラントル数の大小に応じた無次元化を施し、相似解を仮定し、差分解析により出来る限り厳密に数値解を求める。

2. 基礎式

支配方程式は、層流の非圧縮流れを仮定し、境界層近似および Boussinesq 近似をした以下の方程式を用いる。鉛直方向に x 軸をとり、その速度成分を u 、平板に直交する方向に y 軸をとり、その速度成分を v とするものとする。

<連続の式>

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

<運動方程式>

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) \quad (2)$$

<エネルギー方程式>

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

<境界条件>

$$\begin{cases} At & y=0: & u=v=0, & q=-k(\partial T/\partial y) \\ As & y \rightarrow \infty: & u \rightarrow 0, & T \rightarrow T_\infty \end{cases} \quad (4)$$

3. 無次元化

等熱流束加熱の場合も、等温加熱の場合とほぼ同じ要領で無次元化できる。まず無次元量を以下のように置く。

$$X = \frac{x}{x_a}, \quad Y = \frac{y}{y_a}, \quad U = \frac{u}{u_a}, \quad V = \frac{v}{v_a}, \quad \theta = \frac{T - T_b}{T_a} \quad (5)$$

これを式(1)(2)(3)(4)に代入し、整理していく。

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \underbrace{\frac{v_a x_a}{y_a u_a}}_{[1]} \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + \underbrace{\frac{v_a x_a}{y_a u_a}}_{[1]} V \frac{\partial U}{\partial Y} = \underbrace{\frac{v x_a}{y_a^2 u_a}}_{[2]} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \underbrace{\frac{g\beta(T_b - T_\infty)x_a}{u_a^2}}_{[3]} + \underbrace{\frac{g\beta T_a x_a}{u_a^2}}_{[4]} \theta$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + \underbrace{\frac{v_a x_a}{y_a u_a}}_{[1]} V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \underbrace{\frac{\alpha x_a}{y_a^2 u_a}}_{[5]} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} At \quad Y=0: \quad U=V=0, \quad \underbrace{\frac{qy_a}{kT_a}}_{[6]} = -\frac{\partial \theta}{\partial Y} \\ As \quad Y \rightarrow \infty: \quad U=0, \quad \theta = \underbrace{\frac{T_\infty - T_b}{T_a}}_{[7]} \end{array} \right.$$

ここでは、 x_a は鉛直平板の高さであるとして考える。

[3]=0 とおき、 $T_b = T_\infty$ を得る。したがって、[7]は $\theta = 0$ となる。

$$[6] = 1 \text{ より, } \frac{qy_a}{kT_a} = 1 \Rightarrow T_a = \frac{qy_a}{k}$$

$$[5] = 1 \text{ より, } \frac{\alpha x_a}{y_a^2 u_a} = 1 \Rightarrow y_a = \left(\frac{\alpha x_a}{u_a} \right)^{1/2}$$

$$[1] = 1 \text{ より, } \frac{v_a x_a}{y_a u_a} = 1 \Rightarrow v_a = \frac{y_a u_a}{x_a}$$

$$[4] = 1 \text{ より, } \frac{g\beta T_a x_a}{u_a^2} = 1 \Rightarrow u_a = (g\beta T_a x_a)^{1/2} = \left(g\beta \frac{qy_a}{k} x_a \right)^{1/2} = \left(g\beta \frac{q}{k} \left(\frac{\alpha x_a}{u_a} \right)^{1/2} x_a \right)^{1/2}$$

$$\therefore u_a = \left\{ \left(g\beta \frac{q}{k} \right)^2 \alpha x_a^3 \right\}^{1/5} = \left(\frac{g\beta q x_a^4}{k \alpha^2} \right)^{2/5} \frac{\alpha}{x_a} = (Ra^* Pr)^{2/5} \frac{\alpha}{x_a}, \quad \therefore Ra^* = \frac{g\beta q x_a^4}{k \alpha \nu} \quad (6)$$

$$y_a = \left(\frac{\alpha x_a}{u_a} \right)^{1/2} = \left(\frac{\alpha x_a}{(Ra^* Pr)^{2/5} \frac{\alpha}{x_a}} \right)^{1/2} = \left(\frac{x_a^2}{(Ra^* Pr)^{2/5}} \right)^{1/2} = x_a (Ra^* Pr)^{-1/5} \quad (7)$$

$$T_a = \frac{qy_a}{k} = \frac{q}{k} \frac{x_a}{(Ra^* Pr)^{1/5}} = \frac{q x_a}{k} (Ra^* Pr)^{-1/5} \quad (8)$$

$$v_a = \frac{y_a u_a}{x_a} = \frac{\frac{x_a}{(Ra^* Pr)^{1/5}} (Ra^* Pr)^{2/5} \frac{\alpha}{x_a}}{x_a} = (Ra^* Pr)^{1/5} \frac{\alpha}{x_a} \quad (9)$$

このように、無次元方程式を得る.

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (10)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = Pr \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \theta \quad (11)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (12)$$

$$\begin{cases} At & Y=0: U=V=0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = -1 \\ As & Y \rightarrow \infty: U=0, \quad \theta=0 \end{cases} \quad (13)$$

無次元変数は

$$X = \frac{x}{x_a}, \quad Y = \frac{y}{x_a (Ra^* Pr)^{-1/5}}, \quad U = \frac{u}{\frac{\alpha}{x_a} (Ra^* Pr)^{2/5}}, \quad (14)$$

$$V = \frac{v}{\frac{\alpha}{x_a} (Ra^* Pr)^{1/5}}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{\frac{qx_a}{k} (Ra^* Pr)^{-1/5}}$$

さらに、 $X=1$ と置き、相似解を仮定すると、最終的次式を得る。これらの式は Pr が小さい場合に有効である。

<連続の式>

$$\frac{dV}{d\eta} = \frac{1}{5} \left(\eta \frac{dU}{d\eta} - 3U \right) \quad (15)$$

<運動方程式>

$$U \frac{dV}{d\eta} - V \frac{dU}{d\eta} + Pr \frac{d^2 U}{d\eta^2} + \theta = 0 \quad (16)$$

<エネルギー方程式>

$$\frac{U}{5} \left(\eta \frac{d\theta}{d\eta} - \theta \right) - V \frac{d\theta}{d\eta} + \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} = 0 \quad (17)$$

境界条件は,

$$\begin{cases} \eta=0: & U=V=0, \quad d\theta/d\eta = -1 \\ \eta \rightarrow \infty: & U=\theta=0 \end{cases} \quad (18)$$

無次元変数と無次元数の定義は以下のとおり.

$$\eta = \frac{y}{x(Ra_x^* Pr)^{\frac{1}{5}}}, \quad U = \frac{u}{\frac{\alpha}{x}(Ra_x^* Pr)^{\frac{2}{5}}}, \quad V = \frac{v}{\frac{\alpha}{x}(Ra_x^* Pr)^{\frac{1}{5}}},$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{\frac{qx}{k}(Ra_x^* Pr)^{\frac{1}{5}}}, \quad Ra_x^* = \frac{g\beta qx^4}{\alpha\nu k}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$
(19)

局所 Nu 数は、次式の関係式により、

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = \frac{qx}{(T_w - T_\infty)k} = \frac{qx}{T_a \theta_w k} = \frac{\left(\frac{g\beta q}{\alpha^2 k}\right)^{1/5} k}{\underbrace{qx^{1/5}}_{T_a^{-1}}} \frac{qx}{\theta_w k}$$

$$= \left(\frac{g\beta q}{\alpha^2 k}\right)^{1/5} \frac{x^{4/5}}{\theta_w} = \left(\frac{g\beta qx^4}{\alpha^2 k}\right)^{1/5} \frac{1}{\theta_w} = (Ra_x^* Pr)^{1/5} \frac{1}{\theta_w}$$
(20)

$$Nu_x = (Ra_x^* Pr)^{\frac{1}{5}} (\theta|_{\eta=0})^{-1} = (Ra_x Nu_x Pr)^{\frac{1}{5}} (\theta|_{\eta=0})^{-1}$$
(21)

したがって、次式から求められる。

$$\frac{Nu_x}{(Ra_x Pr)^{\frac{1}{4}}} = (\theta|_{\eta=0})^{-\frac{5}{4}}$$
(22)

参考

式(15)-(18)に対して、流れ関数を使った式は以下の通りである。

$$-\frac{3}{5} f' f'' + \frac{4}{5} f f''' + Pr f'''' + \theta = 0$$
(23)

$$-\frac{1}{5} f' \theta + \frac{4}{5} f \theta' + \theta'' = 0$$
(24)

$$\begin{cases} \eta = 0: & f = f' = 0, \quad \theta' = -1 \\ \eta \rightarrow \infty: & f' = \theta = 0 \end{cases}$$
(25)

4. 数値解析結果

等熱流束加熱の場合

上：U, 中：T, 下：Vを示す。座標軸は(10)を参照。左はPrが1以上, 右はPrが1以下。

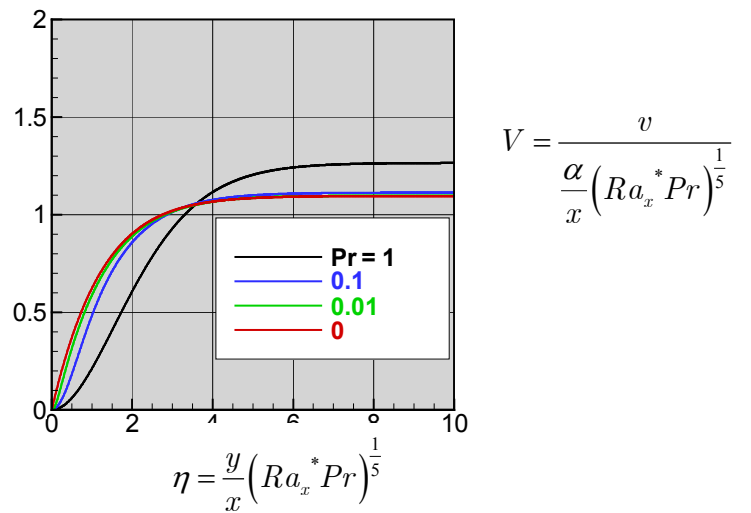
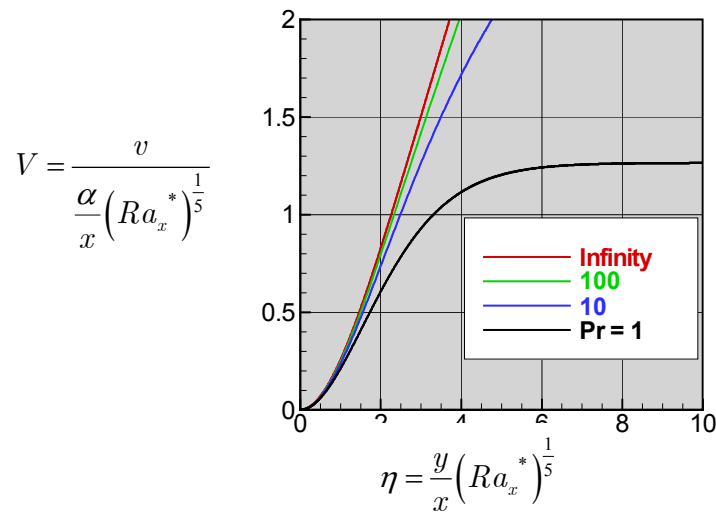
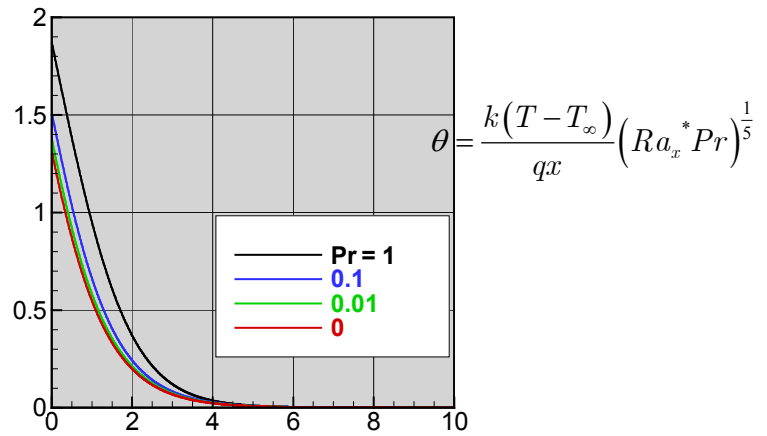
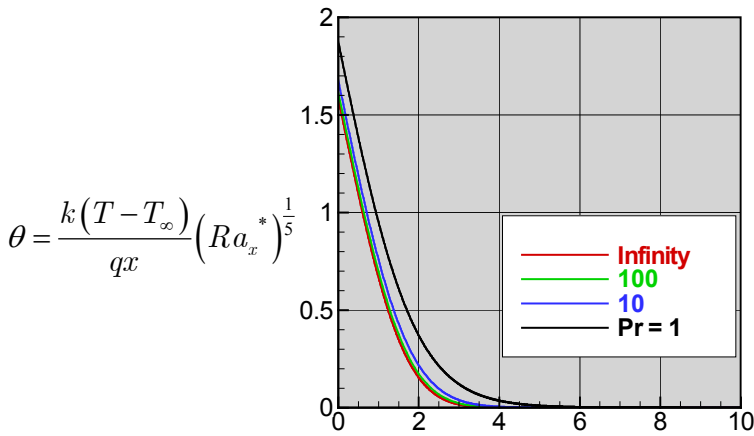
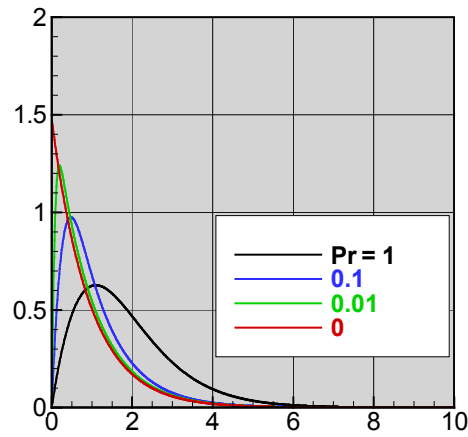
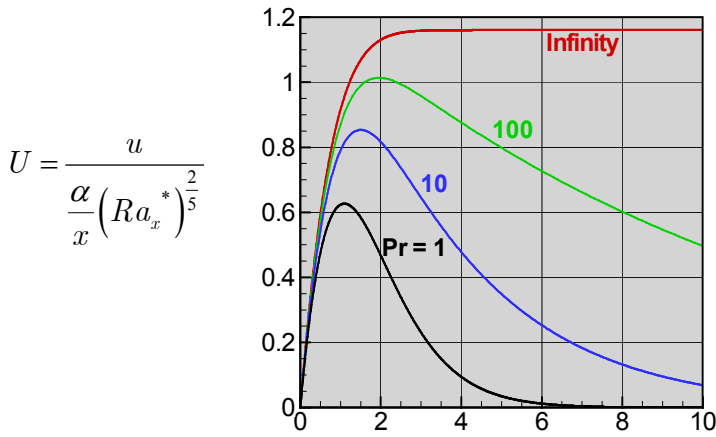


表 1 各 Pr 数に対する局所 Nu 数

(上段：等温加熱，下段：等熱流束加熱，青字：Le Fevre，赤字：Churchill & Ozoe) ^[1]

Pr	0	0.01	0.1	1	10	100	∞
高 Pr の 無次元化 $\frac{Nu_x}{Ra_x^{1/4}}$	等温加熱			0.4010	0.4649	0.4900	0.5027
	等熱流束加熱			0.4564 0.456	0.5234 0.524	0.5495 0.550	0.5631 0.5627
低 Pr の 無次元化 $\frac{Nu_x}{(Ra_x Pr)^{1/4}}$	0.6004 0.6004	0.5698	0.5146	0.4010	等温加熱		
	0.7107 0.6922	0.6694 0.670	0.5970 0.597	0.4564 0.456	等熱流束加熱		

5. 結論

高 Pr 数の計算は， U を最大値から零までなだらかに漸近させるために大きな η の範囲が必要となるので，格子間隔が大きくなり計算精度が落ちてくる．温度境界層は薄いのに対して，速度境界層は一見すると厚く見えるが，粘性力の作用する厚さを速度境界層厚さと定義するなら，温度境界層と厚さは変わらない．力のバランスは，境界層内では粘性力と浮力がバランスし，層外では力は働かない． $Pr = 1000$ でも計算できる (for uniform heat flux, 0.5622) が，精度に確信がないので表には載せないことにした．

低 Pr 数の計算では， η の範囲は常に一定で計算しやすいが，壁近傍での速度勾配が非常に大きくなるので，やはりメッシュを十分に切らないと解が振動したりするので，注意が必要である． $Pr = 0.001$ でも計算できる (for uniform heat flux, 0.6970) が，精度に確信がないので載せないことにした．力のバランスは，境界層内では粘性力と浮力がバランスし，層外では慣性力と浮力がバランスする．

Nu を過去の文献値^[1]と比較すると，等温加熱の場合は， Pr が零や無限大における Le Fevre の結果と完全に一致した．一方，等熱流束加熱の場合は，Churchill & Ozoe^[1]の論文と比較すると，これも総じて一致したが， $Pr = 0$ や 0.001 では若干の差が見られた．

参考文献

1. S. W. Churchill and H. Ozoe, "A correlation for laminar free convection from a vertical plate", *J. Heat Transfer*, pp. 540-541, 1973.