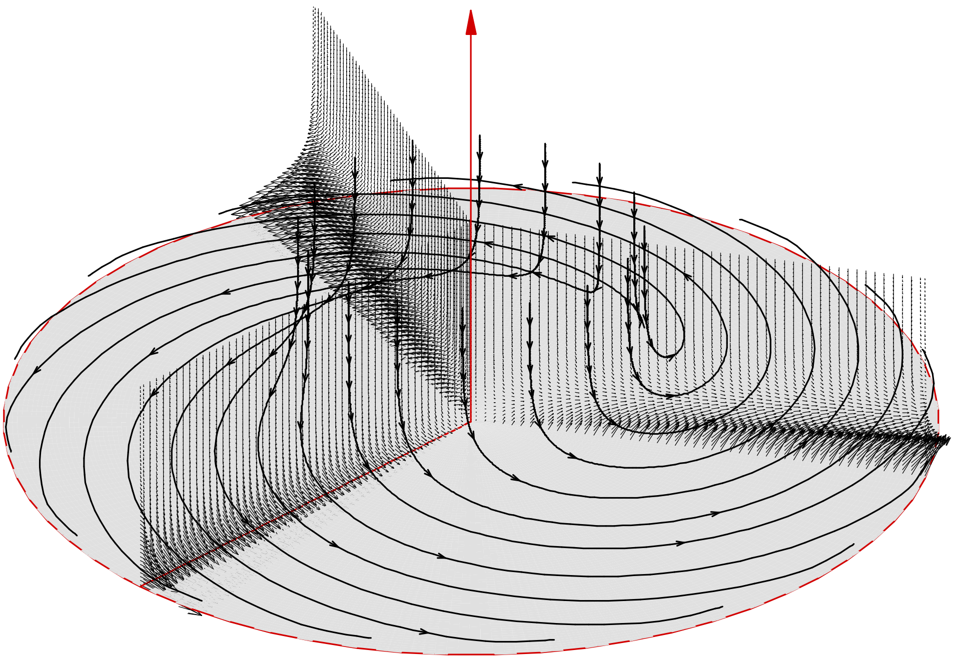
回転円板による流れ

本稿では，非圧縮性流れを仮定した Navier-Stokes 方程式の厳密解の一例として，静止流体中に置かれた一定角速度 ω で回転する円板が誘起する流れを考える．下図は流れの速度ベクトルと流線を示す．



回転円板の壁面から十分に離れた領域では，粘性の影響はなく，円板に向かう一様な流れと見なされる．今，u, v, w はそれぞれ，半径方向，周方向，軸方向の速度成分とする．軸対称流れを仮定した円筒座標系の Navier-Stokes の運動方程式は, 以下のように与えられる．

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial r}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{v^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial r}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{uv}{r}=\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{3}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{4}$$

円板半径が無限であり相似解を仮定するとき，境界層の内外の領域において $\partial w/\partial r=0$

が成り立つ．式(4)を r で微分し，それを適用すると

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) = 0 \tag{5}$$

この式の意味するところは，半径方向の圧力勾配が軸方向に変化しないということである．つまり，

$$\frac{\partial p(r,z)}{\partial r} = f(r) \tag{6}$$

となる．次に，式(1), (2), (3), (4)を無次元化するにあたり，以下のように無次元変数を置く．

$$R = \frac{r}{r_a},\quad Z = \frac{z}{z_a},\quad U = \frac{u}{u_a},\quad V = \frac{v}{v_a},\quad W = \frac{w}{w_a} \tag{7}$$

大文字は無次元変数を示し，右辺の下付添え字 a が付くものが未定参照量を示す．式(7)を式(2)に代入し整理すると，

$$U\frac{\partial U}{\partial R} + \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]} W\frac{\partial U}{\partial Z} - \underbrace{\frac{{v_a}^2}{{u_a}^2}}_{[4]}\frac{V^2}{R} = -\frac{r_a}{\rho {u_a}^2}\frac{\partial p}{\partial r} + \underbrace{\frac{\nu}{r_a u_a}}_{[2]}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R^2}\right) + \underbrace{\frac{\nu r_a}{{z_a}^2 u_a}}_{[3]}\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \tag{8}$$

$$U\frac{\partial V}{\partial R} + \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]} W\frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{UV}{R} = \underbrace{\frac{\nu}{r_a u_a}}_{[2]}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2}\right) + \underbrace{\frac{\nu r_a}{{z_a}^2 u_a}}_{[3]}\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}$$

境界条件

$$\begin{cases} z = 0: \quad u = w = 0, \quad v = \omega r \\ z \to \infty: \quad u = v = 0 \end{cases} \tag{9}$$

についても無次元化をする．

$$\begin{cases} Z = 0: \quad U = W = 0, \quad V = \underbrace{\dfrac{\omega r_a}{v_a}}_{[5]} R \\ Z \to \infty: \quad U = 0, \quad V = 0 \end{cases} \tag{10}$$

無次元速度は，以下の無次元量に依存することがわかる．

$$(U,V,W) = f\left(R, Z, \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]}, \underbrace{\frac{\nu}{r_a u_a}}_{[2]}, \underbrace{\frac{\nu r_a}{{z_a}^2 u_a}}_{[3]}, \underbrace{\frac{{v_a}^2}{{u_a}^2}}_{[4]}, \underbrace{\frac{\omega r_a}{v_a}}_{[5]}\right) \tag{11}$$

これより，[1]から[5]の各無次元量について，未定参照量を決定していく．

[5] = 1, [4] = 1 と置くことにより， $u_a = v_a = \omega r_a$ (12)

[3] = 1 と置くことにより，式(12)を代入し， $z_a = \sqrt{\dfrac{\nu r_a}{u_a}} = \sqrt{\dfrac{\nu}{\omega}}$ (13)

$[1]=1$ と置くことにより，式(12)(13)を代入し， $w_a = \dfrac{z_a u_a}{r_a} = \dfrac{\sqrt{\nu/\omega}\cdot\omega r_a}{r_a} = \sqrt{\omega\nu}$ (14)

[2] は $\dfrac{\nu}{r_a u_a} = \dfrac{\nu}{\omega r_a{}^2} \equiv \dfrac{1}{Re_\omega}$ （後にわかるがここは無関係）

ここまでは, r_a を定数として考えて扱ってきたが, さらに $R=1$ と置き, 相似解を仮定する. つまり，式(7)は次式のように置き換えられる.

$$Z = \frac{z}{z_a} = z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \equiv \eta,\quad U(\eta) = \frac{u(r,z)}{\omega r},\quad V(\eta) = \frac{v(r,z)}{\omega r},\quad W(\eta) = \frac{w(z)}{\sqrt{\omega\nu}} \tag{15}$$

式(15)を利用して，式(2)の各項を求める.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(\omega r U) = \omega\left(U + r\frac{\partial U}{\partial r}\right) = \omega\left(U + r\frac{dU}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial r}\right) = \omega U$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\omega r U) = \omega r\frac{dU}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z} = \omega r\frac{dU}{d\eta}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}(\omega U) = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{\omega U}{r} - \frac{\omega U}{r} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\omega r\frac{dU}{d\eta}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right) = \omega r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\frac{d^2U}{d\eta^2}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = \frac{\omega^2 r}{\nu}\frac{d^2U}{d\eta^2}$$

$$-\frac{v^2}{r} = -\frac{(\omega r V)^2}{r} = -\omega^2 r V^2$$

これらを式(2)に代入し,

$$\omega r U\cdot\omega U + \sqrt{\omega\nu}W\cdot\omega r\frac{dU}{d\eta}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} - \omega^2 r V^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\frac{\omega^2 r}{\nu}\frac{d^2U}{d\eta^2}$$

整理して次式を得る.

$$\underbrace{U^2 + W\frac{dU}{d\eta} - V^2 - \frac{d^2U}{d\eta^2}}_{\text{function of } z} = \underbrace{-\frac{1}{\rho\omega^2 r}\overbrace{\frac{\partial p}{\partial r}}^{f(r)}}_{\text{function of } r} \equiv -P_R \tag{16}$$

式(16)からわかるように，左辺は z の関数であり，右辺は r の関数であるから，結局はそれぞれが定数でなければならない．右辺に示される無次元の半径方向圧力勾配を次式で定義する.

$$P_R \equiv \frac{1}{\rho\omega^2 r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{f(r)}{\rho\omega^2 r} = \frac{k_p}{\rho\omega^2} = \text{const.} \tag{17}$$

ここで，k_p は一定値であり，境界層外のポテンシャル流の状況から決めることができる．

式(17)を r で積分して，次式のように圧力分布が r の関数と z の関数の和として表現されることが示される．

$$\frac{\partial p}{\partial r} = k_p r \quad \Rightarrow \quad p(r,z) = \frac{1}{2} k_p r^2 + p_2(z) \tag{18}$$

では，k_p を求める．ポテンシャル領域では $u = v = 0$ であるので，オイラーの運動方程式は

次式で与えられる．

$$\cancel{u}\frac{\partial u}{\partial r} + w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} - \cancel{\frac{v^2}{r}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

これより

$$\boxed{k_p = 0} \tag{19}$$

無次元圧力勾配は, 式(17)から $P_R = 0$ となり, 結局, 半径方向および周方向の運動方程式は, 次式のようになる．

$$\boxed{U^2 + W\frac{dU}{d\eta} - V^2 = \frac{d^2U}{d\eta^2}} \tag{20}$$

$$\boxed{2UV + W\frac{dV}{d\eta} = \frac{d^2V}{d\eta^2}} \tag{21}$$

また連続の式は，即座に以下のように得られる．

$$\boxed{2U + \frac{dW}{d\eta} = 0} \tag{22}$$

続いて，式(4)の軸方向の運動方程式は，後にわかるが，圧力を求めるためだけに使われるので，あまり重要ではないが，参考までに示す． $p_2(z) = \rho\omega\nu P(\eta)$ と置けば,

$$\boxed{W\frac{dW}{d\eta} = -\frac{dP}{d\eta} + \frac{d^2W}{d\eta^2}} \tag{23}$$

を得る．最終的に，無次元量の定義は以下の通りである．

$$\begin{gathered} \eta = z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}, \quad u(r,z) = \omega r \cdot U(\eta), \quad v(r,z) = \omega r \cdot V(\eta), \\ w(z) = \sqrt{\omega\nu} \cdot W(\eta), \quad p(r,z) = p_2(z) = \rho\omega\nu \cdot P(\eta) \end{gathered} \tag{24}$$

数式のまとめ

以下の連立常微分方程式を反復法などで解く.

$2U + W' = 0$ 　　　　　W を求める

$-U^2 - WU' + V^2 + U'' = 0$ 　　　　　U を求める

$-2UV - WV' + V'' = 0$ 　　　　　V を求める

$P = -\frac{1}{2}W^2 + W'$ 　　　　　P を求める

$$\begin{cases} \eta = 0: \quad U = W = 0, \quad V = 1 \\ \eta \to \infty: \quad U = V = 0 \end{cases}$$

図１，２に数値計算結果を示す．壁面の速度勾配は，それぞれ $U' = 0.510, \quad V' = -0.616$ である．表１に数値解を示す.

解析結果

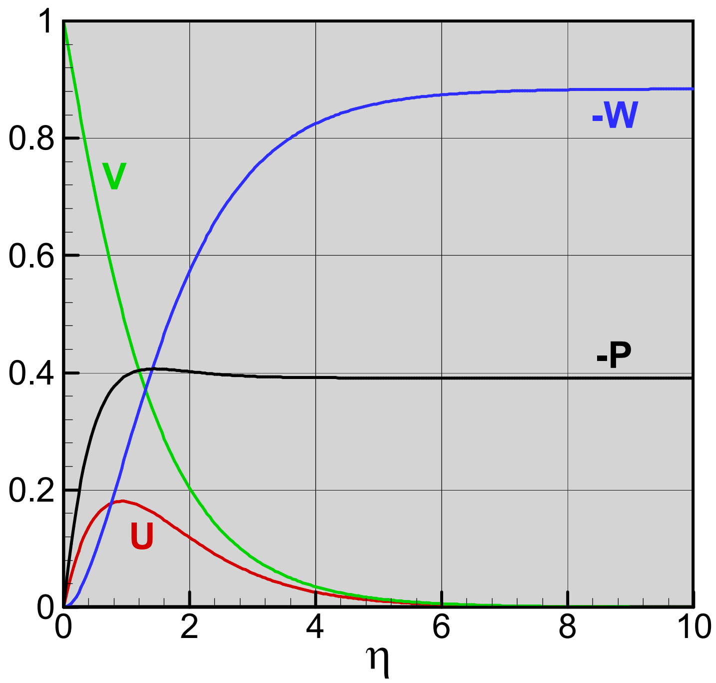


図１　回転円板による流れの計算結果（W と P は負号を付けて表示）

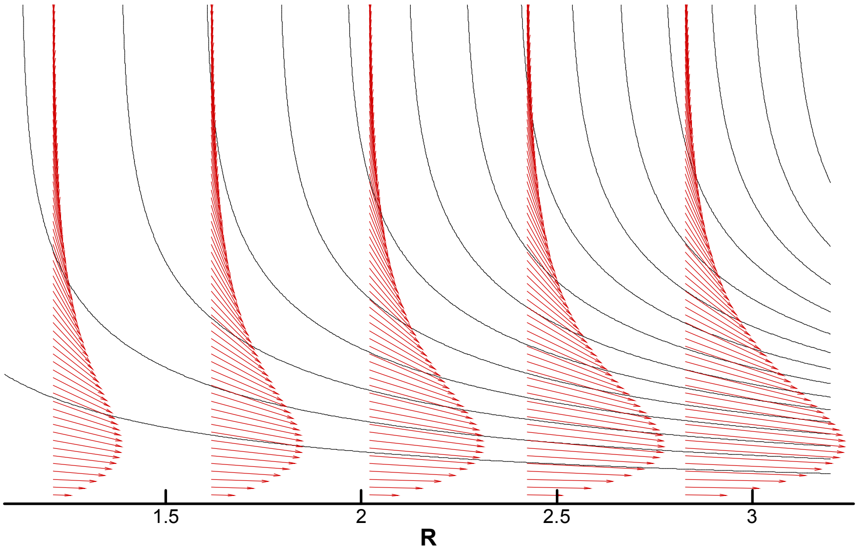


図２　回転円板近傍の流れの様子
（黒は Stokes 流線，赤は子午面の速度分布）

表１　数値解

η	U	V	W	P
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
1.0000	0.1801	0.4766	-0.2655	-0.3955
2.0000	0.1188	0.2033	-0.5732	-0.4020
3.0000	0.0581	0.0845	-0.7453	-0.3940
4.0000	0.0257	0.0349	-0.8251	-0.3917
5.0000	0.0109	0.0144	-0.8596	-0.3913
6.0000	0.0045	0.0060	-0.8742	-0.3912
7.0000	0.0019	0.0024	-0.8802	-0.3912
8.0000	0.0008	0.0010	-0.8827	-0.3912
9.0000	0.0003	0.0004	-0.8838	-0.3912