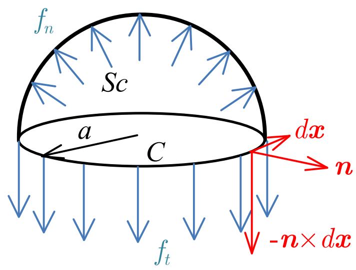
表面張力に関するラプラスの式

半径 a の球形のシャボン玉を，中心を通る断面で切断し，二つの部分に分ける．それらのうち，どちらか一つの部分について界面に働く力のつり合いを考える．



上図のように，半球状の表面 を Sc，切り口を C とする．まず，切り口 C は，面接線方向（図では下向き）に

$$f_t = 2\pi a \gamma \tag{1}$$

の力で引っ張られる．ここで，γ は界面張力で，その次元は N/mである．次に，表面 Sc には，シャボン玉の内圧と外圧の差Δp による面法線方向（外向き）の力が働き，その部分的な力を面全体に渡って積算した力の大きさ f_n（図では上向き）が，式(1)の f_t とつりあうことになる．それは，切り口 C が張る円形の平面（仮想的なもの）に働く力に等しいと考えて，

$$f_n = \left| \iint_{Sc} \Delta p \, \vec{n} dS \right| = \pi a^2 \Delta p \tag{2}$$

となる（補足参照）．ただし，$\vec{n}$ を面外向きの単位法線ベクトルとする．結局，(1)および(2)から，圧力差Δp は，次式で与えられる．

$$\Delta p = p_{in} - p_{out} = \frac{2\gamma}{a} \equiv \gamma \kappa_{sph} \tag{3}$$

ここで，κ_{sph} は球面の曲率である．その界面曲率は

$$\kappa_{sph} = \frac{2}{a} \tag{4}$$

と与えられ，曲率半径 a の逆数の2倍になる．

次に，より一般的な場合を考える．任意の形状をした表面 Sc について考える．表面張力γ（ここでは定数とみなす）によって C 上に力が働き，それが圧力差による面全体に積算された力とつりあうと考えると，次式が得られる（図中の赤色で示されたベクトルの向きを参照）．

$$-\gamma \int_C \vec{n} \times d\vec{x} = \iint_{Sc} \Delta p \, \vec{n} dS \tag{5}$$

ここで，付録の式(A.6)を使って，左辺を面積分に変換する．

$$-\int_C \vec{n} \times d\vec{x} = \iint_{Sc} \left(\vec{n} \times \vec{\nabla} \right) \times \vec{n} \, dS \tag{6}$$

右辺の被積分部分については，以下のように展開できる．

$$\begin{aligned}\left(\vec{n}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{n} &= \varepsilon_{ijk}\left(\varepsilon_{jlm}n_l\partial_m\right)n_k = \varepsilon_{jki}\varepsilon_{jlm}n_l\partial_m n_k = \left(\delta_{kl}\delta_{im}-\delta_{km}\delta_{il}\right)n_l\partial_m n_k \\ &= n_k\partial_i n_k - n_i\partial_k n_k = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(n_k n_k\right)}{\partial x_i} - n_i\frac{\partial n_k}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\underbrace{\left(\vec{n}\cdot\vec{n}\right)}_{0} - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)\vec{n} = -\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)\vec{n}\end{aligned} \tag{7}$$

したがって，式(5), (6), (7)から

$$\iint_{Sc}\Delta p\,\vec{n}\,dS = -\iint_{Sc}\gamma\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{n}\right)\vec{n}\,dS \tag{8}$$

となる．これが任意の面要素について成立するので，積分を外すことができて，

$$\Delta p = -\gamma\vec{\nabla}\cdot\vec{n} \tag{9}$$

を得る．式(3)と式(9)を比べることにより，局所平均曲率 κ は，

$$\kappa = -\vec{\nabla}\cdot\vec{n} \tag{10}$$

となり，単位法線ベクトルの発散（負号付き）として与えられる．

<u>付録</u>

ガウスの定理とストークスの定理の積分公式について，まとめておく．

＜体積分と面積分＞

S は任意の閉曲面，Vs は S で囲まれた空間領域，$\boldsymbol{n}$ は S 上の外向き単位法線ベクトルとする．

$$\iiint_{Vs}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)dV = \iint_S \vec{n}\cdot\vec{A}\,dS = \iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} \quad \text{（ガウスの発散定理）} \tag{A.1}$$

$$\iiint_{Vs}\left(\vec{\nabla}\phi\right)dV = \iint_S \vec{n}\phi\,dS = \iint_S \phi\,d\vec{S} \tag{A.2}$$

$$\iiint_{Vs}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)dV = \iint_S \vec{n}\times\vec{A}\,dS = -\iint_S \vec{A}\times d\vec{S} \tag{A.3}$$

＜面積分と線積分＞

C は任意の閉曲線，Sc は C を境界とする曲面，$\boldsymbol{n}$ は Sc 上での単位法線ベクトルで，C 上の積分方向に対して右ねじの進む方向を正の向きとする．

$$\iint_{Sc}\left(\vec{n}\times\vec{\nabla}\right)\cdot\vec{A}\,dS = \iint_{Sc}\vec{n}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)dS = \iint_{Sc}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\cdot d\vec{S} = \int_C \vec{A}\cdot d\vec{x} \quad \text{（ストークスの定理）} \tag{A.4}$$

$$\iint_{Sc}\left(\vec{n}\times\vec{\nabla}\right)\phi\,dS = \iint_{Sc}\vec{n}\times\left(\vec{\nabla}\phi\right)dS = \int_C \phi\,d\vec{x} \tag{A.5}$$

$$\iint_{Sc}\left(\vec{n}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{A}\,dS = \int_C d\vec{x}\times\vec{A} = -\int_C \vec{A}\times d\vec{x} \tag{A.6}$$

＜証明＞

(A.1)を使って，(A.2)を導く．定数ベクトル$\vec{k}$ との内積をとると，

$$\iint_S \phi\vec{k}\cdot d\vec{S} = \iiint_{Vs}\vec{\nabla}\cdot\left(\phi\vec{k}\right)dV = \iiint_{Vs}\left(\vec{k}\cdot\vec{\nabla}\phi + \phi\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{k}}_{0}\right)dV = \iiint_{Vs}\left(\vec{k}\cdot\vec{\nabla}\phi\right)dV$$

$$\therefore\quad \iint_S \phi d\vec{S} = \iiint_{Vs}\vec{\nabla}\phi\, dV$$

(A.1)を使って，(A.3)を導く．定数ベクトル$\vec{k}$ との外積をとり，スカラー３重積を考慮して

$$\iint_S\left(\vec{A}\times\vec{k}\right)\cdot\vec{n}\, dS = \iint_S \vec{k}\cdot\left(\vec{n}\times\vec{A}\right)dS$$

$$= \iiint_{Vs}\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{k}\right)dV = \iiint_{Vs}\left\{\vec{k}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) - \vec{A}\cdot\underbrace{\left(\vec{\nabla}\times\vec{k}\right)}_{\vec{0}}\right\}dV = \iiint_{Vs}\vec{k}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)dV$$

$$\therefore\quad \iint_S \vec{n}\times\vec{A}\, dS = \iiint_{Vs}\vec{\nabla}\times\vec{A}\, dV$$

(A.4)を使って，(A.5)を導く．定数ベクトル$\vec{k}$ との内積をとると，

$$\int_C \phi\vec{k}\cdot d\vec{x} = \iint_{Sc}\left(\vec{n}\times\vec{\nabla}\right)\cdot\left(\phi\vec{k}\right)dS = \iint_{Sc}\left\{\vec{k}\cdot\left(\vec{n}\times\vec{\nabla}\right)\phi + \phi\underbrace{\left(\vec{n}\times\vec{\nabla}\right)\cdot\vec{k}}_{0}\right\}dS = \iint_{Sc}\vec{k}\cdot\left(\vec{n}\times\vec{\nabla}\phi\right)dS$$

$$\therefore\quad \int_C \phi\, d\vec{x} = \iint_{Sc}\vec{n}\times\vec{\nabla}\phi\, dS$$

(A.4)を使って，(A.6)を導く．定数ベクトル$\vec{k}$ との外積をとり，スカラー３重積を考慮して

$$\int_C\left(\vec{A}\times\vec{k}\right)\cdot d\vec{x} = \int_C \vec{k}\cdot\left(d\vec{x}\times\vec{A}\right)$$

$$= \iint_{Sc}\left(\vec{n}\times\vec{\nabla}\right)\cdot\left(\vec{A}\times\vec{k}\right)dS = \iint_{Sc}\left[\vec{k}\cdot\left\{\left(\vec{n}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{A}\right\} - \vec{A}\cdot\underbrace{\left\{\left(\vec{n}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{k}\right\}}_{\vec{0}}\right]dS = \iint_{Sc}\vec{k}\cdot\left\{\left(\vec{n}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{A}\right\}dS$$

$$\therefore\quad \int_C d\vec{x}\times\vec{A} = \iint_{Sc}\left(\vec{n}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{A}\, dS$$

補足：式(2)の説明

半球面の北極点から角度θをとる球座標系を考えることにより，面積分することができる．球面上の微小面積（軸対称なので，環状な形状とする）は，

$$dS = 2\pi a^2\sin\theta\, d\theta$$

となるので，軸方向の力を得るために，余弦関数をかけて積分し

$$f_n = \left|\iint_{Sc}\Delta p\,\vec{n}dS\right| = \int_0^{\pi/2}\Delta p\cos\theta\cdot 2\pi a^2\sin\theta\, d\theta = \pi a^2\Delta p$$

と得られる．