一様軸方向磁場下における静止円板近傍の流れ

本稿では，非圧縮性流れを仮定した Navier-Stokes 方程式の厳密解の一例として，一定角速度 ω で回転する導電性流体中に置かれた静止円板近傍の流れを考える．回転軸に平行な一様な磁場があり，静止円板の壁面から十分に離れた領域では，粘性の影響はないと見なされる．今，u, v, w はそれぞれ，半径方向，周方向，軸方向の速度成分とする．軸対称流れを仮定した円筒座標系の連続の式，Navier-Stokes の運動方程式，電荷保存則およびオームの法則は，以下のように与えられる．

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial r}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{v^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{\rho}j_\theta B_0 \tag{2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial r}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{uv}{r}=\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{\rho}j_r B_0 \tag{3}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{4}$$

$$\frac{\partial j_r}{\partial r}+\frac{j_r}{r}+\frac{\partial j_z}{\partial z}=0 \tag{5}$$

$$j_r=\sigma\left(-\frac{\partial \phi}{\partial r}+vB_0\right) \tag{6}$$

$$j_\theta=\sigma\left(-uB_0\right) \tag{7}$$

$$j_z=\sigma\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \tag{8}$$

境界条件は，壁面で滑り無しの絶縁とし，無限遠では流体は剛体回転しているとする．

$$\begin{cases} z=0: \quad u=v=w=0, \quad j_z=0 \\ z\to\infty: \quad u=0, \quad v=\omega r, \quad j_r=j_\theta=0 \end{cases} \tag{9}$$

円板半径が無限であり相似解を仮定するとき，境界層の内外の領域において $\partial w/\partial r=0$ が成り立つ．式(4)を r で微分し，それを適用すると

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r\partial z}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)=0 \tag{10}$$

この式の意味するところは，半径方向の圧力勾配が軸方向に変化しないということである．つまり，

$$\frac{\partial p(r,z)}{\partial r} = f(r) \tag{11}$$

となる．次に，式(1)-(9)を無次元化するにあたり，以下のように無次元変数を置く．

$$\begin{aligned} &R = \frac{r}{r_a},\quad Z = \frac{z}{z_a},\quad U = \frac{u}{u_a},\quad V = \frac{v}{v_a},\quad W = \frac{w}{w_a}, \\ &J_R = \frac{j_r}{j_{ra}},\quad J_\theta = \frac{j_\theta}{j_{\theta a}},\quad J_Z = \frac{j_z}{j_{za}} \end{aligned} \tag{12}$$

大文字は無次元変数を示し，右辺の下付添え字 a が付くものが未定参照量を示す．式(12)を式(1)から式(8)に代入し整理すると，

$$\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{U}{R} + \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]}\frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &U\frac{\partial U}{\partial R} + \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]} W\frac{\partial U}{\partial Z} - \underbrace{\frac{{v_a}^2}{{u_a}^2}}_{[4]}\frac{V^2}{R} = -\frac{r_a}{\rho {u_a}^2}\frac{\partial p}{\partial r} + \underbrace{\frac{\nu}{r_a u_a}}_{[2]}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R^2}\right) \\ &+ \underbrace{\frac{\nu r_a}{{z_a}^2 u_a}}_{[3]}\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} + \underbrace{\frac{r_a j_{\theta a} B_0}{\rho {u_a}^2}}_{[6]} J_\theta \end{aligned} \tag{14}$$

$$U\frac{\partial V}{\partial R} + \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]} W\frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{UV}{R} = \underbrace{\frac{\nu}{r_a u_a}}_{[2]}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2}\right) + \underbrace{\frac{\nu r_a}{{z_a}^2 u_a}}_{[3]}\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} - \underbrace{\frac{r_a j_{ra} B_0}{\rho u_a v_a}}_{[7]} J_R \tag{15}$$

$$U\frac{\partial W}{\partial R} + \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]} W\frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{r_a}{\rho u_a w_a}\frac{\partial p}{\partial z} + \underbrace{\frac{\nu}{r_a u_a}}_{[2]}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial W}{\partial R}\right) + \underbrace{\frac{\nu r_a}{{z_a}^2 u_a}}_{[3]}\frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \tag{16}$$

$$\frac{\partial J_R}{\partial R} + \frac{J_R}{R} + \underbrace{\frac{j_{za} r_a}{z_a j_{ra}}}_{[8]}\frac{\partial J_Z}{\partial Z} = 0 \tag{17}$$

$$J_R = -\frac{\sigma}{j_{ra}}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \underbrace{\frac{\sigma v_a B_0}{j_{ra}}}_{[9]} V \tag{18}$$

$$J_\theta = -\underbrace{\frac{\sigma u_a B_0}{j_{\theta a}}}_{[10]} U \tag{19}$$

$$J_Z = -\frac{\sigma}{j_{za}}\frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{20}$$

境界条件(9)についても無次元化を行う.

$$\begin{cases} Z = 0: \quad U = V = W = 0, \quad J_Z = 0 \\ Z \to \infty: \quad U = 0, \quad V = \underbrace{\frac{\omega r_a}{v_a}}_{[5]} R, \quad J_R = J_\theta = 0 \end{cases} \tag{21}$$

無次元速度は，以下の無次元量に依存することがわかる.

$$\left(\vec{U}, \vec{J}\right) = f\left(\begin{array}{l} R, Z, \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]}, \underbrace{\frac{\nu}{r_a u_a}}_{[2]}, \underbrace{\frac{\nu r_a}{{z_a}^2 u_a}}_{[3]}, \underbrace{\frac{{v_a}^2}{{u_a}^2}}_{[4]}, \underbrace{\frac{\omega r_a}{v_a}}_{[5]}, \\ \underbrace{\frac{r_a j_{\theta a} B_0}{\rho {u_a}^2}}_{[6]}, \underbrace{\frac{r_a j_{ra} B_0}{\rho u_a v_a}}_{[7]}, \underbrace{\frac{j_{za} r_a}{z_a j_{ra}}}_{[8]}, \underbrace{\frac{\sigma v_a B_0}{j_{ra}}}_{[9]}, \underbrace{\frac{\sigma u_a B_0}{j_{\theta a}}}_{[10]} \end{array} \right) \tag{22}$$

これより，[1]から[10]の各無次元量について，未定参照量を決定していく.

[5] = 1, [4] = 1 と置くことにより， $u_a = v_a = \omega r_a$ (23)

[3] = 1 と置くことにより，式(23)を代入し， $z_a = \sqrt{\frac{\nu r_a}{u_a}} = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ (24)

[1] = 1 と置くことにより，式(23)(24)を代入し， $w_a = \frac{z_a u_a}{r_a} = \frac{\sqrt{\nu/\omega}\cdot \omega r_a}{r_a} = \sqrt{\omega\nu}$ (25)

[2] は $\frac{\nu}{r_a u_a} = \frac{\nu}{\omega {r_a}^2} \equiv \frac{1}{Re_\omega}$ （後にわかるがここは無関係）

[9] = 1, [10] = 1 と置くことにより， $j_{ra} = j_{\theta a} = \sigma u_a B_0 = \sigma r_a \omega B_0$ (26)

[8] = 1 より， $\frac{j_{za} r_a}{z_a j_{ra}} = 1 \quad \Rightarrow \quad j_{za} = \frac{z_a j_{ra}}{r_a} = \frac{z_a \sigma r_a \omega B_0}{r_a} = \sigma\omega B_0\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ (27)

[6] = [7] = $\frac{r_a j_{\theta a} B_0}{\rho {u_a}^2} = \frac{r_a \sigma r_a \omega B_0 B_0}{\rho\left(\omega r_a\right)^2} = \frac{\sigma {B_0}^2}{\rho\omega} \equiv N$ (28)

ここまでは，r_a を定数として考えて扱ってきたが，さらに $R = 1$ と置き，相似解を仮定する. つまり，式(12)は次式のように置き換えられる.

$$Z = \frac{z}{z_a} = z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \equiv \eta, \quad U(\eta) = \frac{u(r,z)}{\omega r}, \quad V(\eta) = \frac{v(r,z)}{\omega r}, \quad W(\eta) = \frac{w(z)}{\sqrt{\omega\nu}},$$
$$J_R(\eta) = \frac{j_r(r,z)}{\sigma B_0 \omega r}, \quad J_\theta(\eta) = \frac{j_\theta(r,z)}{\sigma B_0 \omega r}, \quad J_Z(\eta) = \frac{j_z(z)}{\sigma B_0 \sqrt{\omega\nu}} \tag{29}$$

式(29)を利用して，運動方程式の各項を求める．

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(\omega r U) = \omega\left(U + r\frac{\partial U}{\partial r}\right) = \omega\left(U + r\frac{dU}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial r}\right) = \omega U$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\omega r U) = \omega r\frac{dU}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} = \omega r\frac{dU}{d\eta}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}(\omega U) = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{\omega U}{r} - \frac{\omega U}{r} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\omega r\frac{dU}{d\eta}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right) = \omega r\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\frac{d^2U}{d\eta^2}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = \frac{\omega^2 r}{\nu}\frac{d^2U}{d\eta^2}$$

$$-\frac{v^2}{r} = -\frac{(\omega r V)^2}{r} = -\omega^2 r V^2$$

$$\frac{1}{\rho} j_\theta B_0 = \frac{\sigma {B_0}^2 \omega}{\rho} r J_\theta$$

これらを式(2)に代入し，

$$\omega r U \cdot \omega U + \sqrt{\omega\nu} W \cdot \omega r \frac{dU}{d\eta}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} - \omega^2 r V^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\frac{\omega^2 r}{\nu}\frac{d^2U}{d\eta^2} + \frac{\sigma {B_0}^2 \omega}{\rho} r J_\theta$$

整理して次式を得る．

$$\underbrace{U^2 + W\frac{dU}{d\eta} - V^2 - \frac{d^2U}{d\eta^2} - \frac{\overbrace{\sigma {B_0}^2}^{N}}{\rho\omega} J_\theta}_{\text{function of } z} = \underbrace{-\frac{1}{\rho\omega^2 r}\overbrace{\frac{\partial p}{\partial r}}^{f(r)}}_{\text{function of } r} \equiv -P_R \tag{30}$$

これからわかるように，左辺は z の関数であり，右辺は r の関数であるから，結局はそれぞれが定数でなければならない．右辺に示される無次元の半径方向圧力勾配を次式で定義する．

$$P_R \equiv \frac{1}{\rho\omega^2 r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{f(r)}{\rho\omega^2 r} = \frac{k_p}{\rho\omega^2} = \text{const.} \tag{31}$$

ここで，k_p は一定値であり，境界層外のポテンシャル流の状況から決めることができる．

式(31)を r で積分して，次式のように圧力分布が r の関数と z の関数の和として表現されることが示される．

$$\frac{\partial p}{\partial r}=k_p r \quad \Rightarrow \quad p\left(r,z\right)=\frac{1}{2}k_p r^2+p_2\left(z\right) \tag{32}$$

では，k_p を求める．ポテンシャル領域では $v=\omega r$ であるので，オイラーの運動方程式は次式で与えられる．

$$-\frac{\left(\omega r\right)^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial r}=\rho\omega^2 r$$

これより

$$k_p=\rho\omega^2 \tag{33}$$

無次元圧力勾配は, 式(31)から $P_R=1$ となり, 結局, 半径方向および周方向の運動方程式は, 次式のようになる．

$$U^2+W\frac{dU}{d\eta}-V^2=-1+\frac{d^2U}{d\eta^2}+NJ_\theta \tag{34}$$

$$2UV+W\frac{dV}{d\eta}=\frac{d^2V}{d\eta^2}-NJ_R \tag{35}$$

また連続の式は，即座に以下のように得られる．

$$2U+\frac{dW}{d\eta}=0 \tag{36}$$

一方で，電荷保存則に関しても同様にして次式を得ることができる．

$$2J_R+\frac{dJ_Z}{d\eta}=0 \tag{37}$$

式(18)のオームの式は，

$$\underbrace{J_R-V}_{\text{function of } z}=\underbrace{-\frac{1}{B_0\omega r}\frac{\partial\phi}{\partial r}}_{\text{function of } r}\equiv-\Phi_R \tag{38}$$

となるが，これからわかるように，左辺は z の関数であり，右辺は r の関数であるから，結局はそれぞれが定数でなければならない．右辺に示される無次元の半径方向電位勾配を次式で定義する．

$$\Phi_R\equiv\frac{1}{B_0\omega r}\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{k_\phi}{B_0\omega}=\text{const.} \tag{39}$$

ここで，k_ϕ は一定値であり，ポテンシャル領域における状態から決めることができる．今

は，ポテンシャル領域では半径方向の電位勾配は

$$j_r = \sigma\left(-\frac{\partial\phi}{\partial r} + vB_0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\phi}{\partial r} = vB_0 = \omega B_0 r \quad \Rightarrow \quad \Phi_R = 1$$

であり，これが境界層内でも成立する．結局，以下のように単純になる．

$$J_R = -1 + V \tag{40}$$

続いて，式(4)の軸方向の運動方程式は，後にわかるが，圧力を求めるためだけに使われる．

$p_2(z) = \rho\omega\nu P(\eta)$ と置けば，

$$W\frac{dW}{d\eta} = -\frac{dP}{d\eta} + \frac{d^2W}{d\eta^2} \tag{41}$$

を得る．最終的に，無次元量の定義は以下の通りである．

$$\eta = z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}, \quad u(r,z) = \omega r \cdot U(\eta), \quad v(r,z) = \omega r \cdot V(\eta),$$

$$w(z) = \sqrt{\omega\nu} \cdot W(\eta), \quad p(r,z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho\omega\nu \cdot P(\eta), \quad N = \frac{\sigma B_0{}^2}{\rho\omega} \tag{42}$$

<u>数式のまとめ</u>

以下の連立常微分方程式を反復法などで解く．

$2U + W' = 0$	W を求める
$-U^2 - WU' + V^2 - 1 + U'' - NU = 0$	U を求める
$-2UV - WV' + V'' - N(V-1) = 0$	V を求める

B.C.

$$\begin{cases} \eta = 0: \quad U = V = W = J_Z = 0 \\ \eta \to \infty: \quad U = 0, \quad V = 1 \end{cases}$$

以下の各変数は速度を得るための計算には必要ではないが，もし求めるなら次式のように与えられる．

$J_R = -1 + V$	J_R は V を平行移動させたもの
$J_\theta = -U$	J_θ は U に負号をつけたもの
$P = -\frac{1}{2}W^2 + W'$	P を求める
$2J_R + J_Z' = 0$	J_Z を求める
$J_Z + \Phi' = 0$	Φを求める

図１に数値計算結果を示す．壁面の速度勾配は，N の値によって変化する．

解析結果

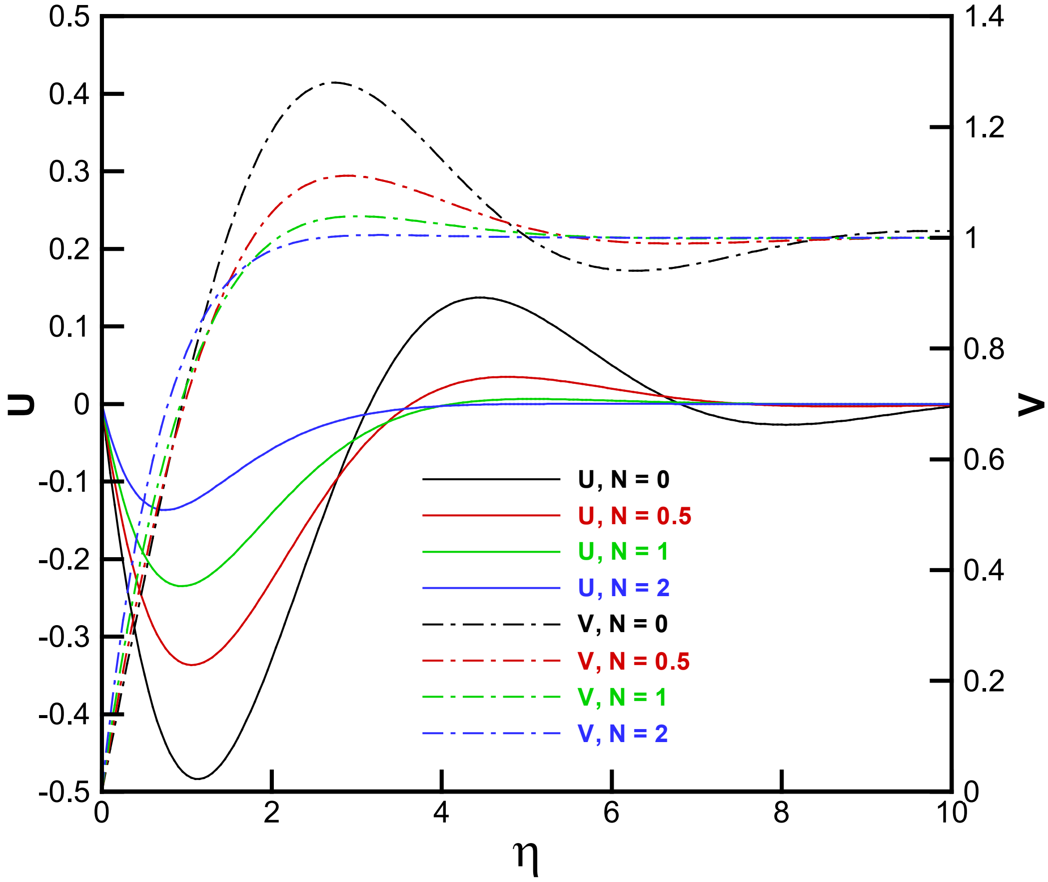

図１　静止円板近傍の流れに及ぼす磁場の影響

（Nは相互作用係数）