

## 一様磁場下における Couette 流れの理論解析

Navier-Stokes の運動方程式は,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{j} \times \vec{B} \quad (1)$$

である. 電流密度は, Ohm の法則と電荷保存則の両方から求められる.

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (3)$$

式(1)において, 流れが一方向で, 定常で, 圧力勾配無しであれば,

$$\vec{0} = \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{j} \times \vec{B} \quad (4)$$

と簡単になる. 電磁力項をまず計算する.

$$\vec{j} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ j_x & j_y & j_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} j_y B_0 \\ -j_x B_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -u B_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5), (6)$$

式(2), 式(6)から, 電流密度は  $y$  方向のみであることがわかる.

$$j_y = \sigma(E_y - u B_0), \quad j_x = j_z = 0 \quad (7), (8)$$

この電流密度は, 式(3)を満足している. 式(7)を式(5)に代入して,

$$\vec{j} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ j_x & j_y & j_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} j_y B_0 \\ -j_x B_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(E_y - u B_0) B_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

を得る. ここで,  $E_y$  は  $y$  方向に発生する一様な電場 (定数) であり, これは電流に直交する壁の電氣的境界条件に依存する. 一般に, 絶縁壁で電場の値は大きく, 導電壁では小さい. 式(9)を式(4)に代入し, 速度  $u$  が  $z$  のみの関数であることに注意すれば,

$$0 = \nu \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\sigma B_0}{\rho} (E_y - u B_0) \quad (10)$$

となる. これを以下の境界条件のもと解く.

$$\begin{cases} u = u_0 & \text{at } z = a \\ u = 0 & \text{at } z = 0 \end{cases} \quad (11)$$

式(10)を変形すると,

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho \nu} u(z) = -\frac{\sigma B_0 E_y}{\rho \nu} \quad (12)$$

式(12)は, 非同次方程式であるので, 右辺をゼロとした同次方程式の一般解に, 式(12)の特殊解を加えたものが, 式(12)の一般解である. まず, 同次方程式の一般解は, 以下のようになる.

$$u(z) = c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 z\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 z\right) \quad (13)$$

次に、式(12)の特殊解は、2階微分項をゼロとして得られる。

$$u_{sp} = \frac{\rho\nu}{\sigma B_0^2} \frac{\sigma B_0 E_y}{\rho\nu} = \frac{E_y}{B_0} \quad (14)$$

したがって、式(12)の一般解は、

$$u(z) = c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 z\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 z\right) + \frac{E_y}{B_0} \quad (15)$$

境界条件より、

$$u(0) = c_1 \exp(0) + c_2 \exp(-0) + \frac{E_y}{B_0} = c_1 + c_2 + \frac{E_y}{B_0} = 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} u(a) &= c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 a\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 a\right) + \frac{E_y}{B_0} \\ &= c_1 \exp(Ha) + c_2 \exp(-Ha) + \frac{E_y}{B_0} = u_0 \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、

$$Ha = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 a, \quad Z = \frac{z}{a} \quad (18)$$

である。式(16)、式(17)を連立させて、 $c_1, c_2$ を求めると、

$$c_1 = \frac{-\frac{E_y}{B_0} [1 - \exp(-Ha)] + u_0}{\exp(Ha) - \exp(-Ha)}, \quad c_2 = \frac{\frac{E_y}{B_0} [1 - \exp(Ha)] - u_0}{\exp(Ha) - \exp(-Ha)} \quad (19)$$

さらに、式(15)に代入すると、

$$u(z) = \left( \frac{-\frac{E_y}{B_0} [1 - \exp(-Ha)] + u_0}{\exp(Ha) - \exp(-Ha)} \right) \exp\left(Ha \frac{z}{a}\right) + \left( \frac{\frac{E_y}{B_0} [1 - \exp(Ha)] - u_0}{\exp(Ha) - \exp(-Ha)} \right) \exp\left(-Ha \frac{z}{a}\right) + \frac{E_y}{B_0}$$

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{u_0 [\exp(Ha \cdot Z) - \exp(-Ha \cdot Z)]}{\exp(Ha) - \exp(-Ha)} \\ &\quad + \frac{1}{\exp(Ha) - \exp(-Ha)} \left\{ \begin{aligned} &-\frac{E_y}{B_0} [1 - \exp(-Ha)] \exp(Ha \cdot Z) \\ &+\frac{E_y}{B_0} [1 - \exp(Ha)] \exp(-Ha \cdot Z) \end{aligned} \right\} + \frac{E_y}{B_0} \end{aligned}$$

整理すると、

$$u(z) = u_0 \frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} + \frac{E_y}{B_0} \left[ 1 - \frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} + \frac{\sinh(Ha \cdot (Z-1))}{\sinh(Ha)} \right] \quad (20)$$

無次元の速度は、

$$U(Z) = \frac{u(z)}{u_0} = \frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} + \frac{E_y}{u_0 B_0} \left[ 1 - \frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} + \frac{\sinh(Ha \cdot (Z-1))}{\sinh(Ha)} \right] \quad (21)$$

次に無次元速度の平均値を求める。

$$\begin{aligned} U_{ave} &= \int_0^1 U(Z) dZ = \int_0^1 \left[ \frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} + \frac{E_y}{B_0 u_0} \left\{ 1 - \frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} + \frac{\sinh(Ha \cdot (Z-1))}{\sinh(Ha)} \right\} \right] dZ \\ &= \frac{\cosh(Ha) - \cosh(0)}{Ha \cdot \sinh(Ha)} + \frac{E_y}{B_0 u_0} \left\{ 1 - \frac{\cosh(Ha) - \cosh(0)}{Ha \cdot \sinh(Ha)} + \frac{\cosh(0) - \cosh(-Ha)}{Ha \cdot \sinh(Ha)} \right\} \\ U_{ave} &= \frac{\cosh(Ha) - 1}{Ha \cdot \sinh(Ha)} + \frac{E_y}{B_0 u_0} \left\{ 1 + 2 \frac{1 - \cosh(Ha)}{Ha \cdot \sinh(Ha)} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

一方、電流密度は、式(20)から

$$\begin{aligned} j_y &= \sigma(E_y - uB_0) = \sigma \left( E_y - u_0 B_0 \frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} - E_y \left[ 1 - \frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} + \frac{\sinh(Ha \cdot (Z-1))}{\sinh(Ha)} \right] \right) \\ j_y &= \sigma \left( -u_0 B_0 \frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} - E_y \left[ -\frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} + \frac{\sinh(Ha \cdot (Z-1))}{\sinh(Ha)} \right] \right) \end{aligned} \quad (23)$$

無次元電流密度は、

$$\begin{aligned} J_y &= \frac{j_y}{\sigma u_0 B_0} = \frac{1}{u_0 B_0} \left( -u_0 B_0 \frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} - E_y \left[ -\frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} + \frac{\sinh(Ha \cdot (Z-1))}{\sinh(Ha)} \right] \right) \\ &= -\frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} - \frac{E_y}{u_0 B_0} \left[ -\frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} + \frac{\sinh(Ha \cdot (Z-1))}{\sinh(Ha)} \right] = -U + \frac{E_y}{u_0 B_0} \end{aligned} \quad (24)$$

無次元電流密度の平均値は、

$$\begin{aligned} J_y|_{ave} &= \int_0^1 J_y dZ = \int_0^1 \left[ -U + \frac{E_y}{u_0 B_0} \right] dZ = -U_{ave} + \frac{E_y}{u_0 B_0} \\ &= -\left[ \frac{\cosh(Ha) - 1}{Ha \cdot \sinh(Ha)} + \frac{E_y}{B_0 u_0} \left\{ 1 + 2 \frac{1 - \cosh(Ha)}{Ha \cdot \sinh(Ha)} \right\} \right] + \frac{E_y}{u_0 B_0} \\ &= -\frac{\cosh(Ha) - 1}{Ha \cdot \sinh(Ha)} - 2 \frac{E_y}{B_0 u_0} \left\{ \frac{1 - \cosh(Ha)}{Ha \cdot \sinh(Ha)} \right\} \\ J_y|_{ave} &= \frac{1 - \cosh(Ha)}{Ha \cdot \sinh(Ha)} \left( 1 - 2 \frac{E_y}{B_0 u_0} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

以下, 場合分け

○ 絶縁壁の時 ( $J_{ave} = 0$ )

$$E_y = \frac{1}{2} B_0 u_0 \quad (26)$$

これを(21)式に代入すると,

$$U(Z) = \frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} + \frac{\sinh(Ha \cdot (Z-1))}{\sinh(Ha)} \right]$$

$$U(Z) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} + \frac{\sinh(Ha \cdot (Z-1))}{\sinh(Ha)} \right) \quad (27)$$

○ 完全導電壁 ( $E_y = 0$ )

$$E_y = 0 \quad (28)$$

$$U(Z) = \frac{\sinh(Ha \cdot Z)}{\sinh(Ha)} \quad (29)$$

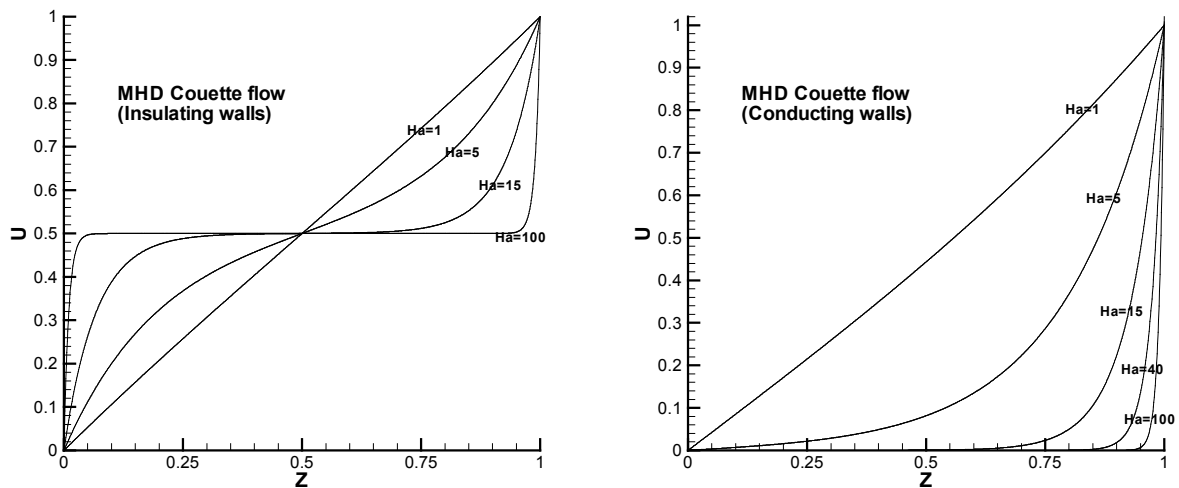


図1 一様磁場下におけるクエット流れ

左は電流に直交する壁が電気絶縁の場合 (式(27)), 右は完全導電壁の場合 (式(29))

左上図は絶縁壁の場合の結果で, 右上図は完全導電壁の場合である. 図の見方であるが, 右端が速度 1 で壁が上に動いている. 絶縁壁では,  $Z = 0.5$  において常に  $U = 0.5$  である.  $Ha$  数が大きくなると, Hartmann 境界層 (大きな速度勾配) を除くコア領域では,  $U = 0.5$  である. 導電壁では, Hartmann 境界層を除くコア領域で速度はゼロに近づく.