

一様軸方向磁場下における Ekman 境界層流れ

本稿では、非圧縮性流れを仮定した Navier-Stokes 方程式の厳密解の一例として、一定角速度 Ω で回転する導電性流体中に置かれた円板近傍の流れを考える。円板は、同軸に角速度 ω で回転するものとする。回転軸に平行な一様な磁場があり、円板の壁面から十分に離れた領域では、粘性の影響はないと見なされる。今、 u, v, w はそれぞれ、半径方向、周方向、軸方向の速度成分とする。回転座標系における軸対称流れを仮定した円筒座標系の連続の式、Navier-Stokes の運動方程式、電荷保存則およびオームの法則は、以下のように与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\hat{v}^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + 2\Omega \hat{v} + \frac{1}{\rho} j_\theta B_0 \quad (2)$$

$$u \frac{\partial \hat{v}}{\partial r} + w \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} + \frac{u\hat{v}}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{v}}{\partial r} - \frac{\hat{v}}{r^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z^2} \right) - 2\Omega u - \frac{1}{\rho} \hat{j}_r B_0 \quad (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \hat{j}_r}{\partial r} + \frac{\hat{j}_r}{r} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

$$\hat{j}_r = \sigma \left(-\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} + \hat{v} B_0 \right), \quad j_\theta = \sigma (-u B_0), \quad j_z = \sigma \left(-\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \quad (6)$$

ただし、周方向速度と圧力に関しては、以下の関係がある。回転座標系から見た変数には、 $\hat{\cdot}$ をつけて区別するものとする。

$$\hat{v} = v - \Omega r, \quad \hat{p} = p - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 \quad (7)$$

式(2)において、遠心力項は圧力項に含まれるよう考慮した。結局、コリオリ力項が現れる点だけが、慣性系の運動方程式と形が異なる。

同様に、半径方向の電流密度と電位に関しては、以下の関係がある。

$$\hat{j}_r = j_r, \quad \hat{\phi} = \phi - \frac{1}{2} \Omega B_0 r^2 \quad (8)$$

回転座標系での電位 $\hat{\phi}$ については、半径方向の電流密度の式が慣性座標系と同形になるよ

うに定義した.

境界条件としては, 円板壁面で滑り無しの絶縁とし, 回転座標系からみて角速度 ω で回転している. 一方, 無限遠では流体は Ω で回転しているとする.

$$\begin{cases} z=0: & u=w=0, \quad v=(\omega+\Omega)r, \quad j_z=0 \\ z \rightarrow \infty: & u=0, \quad v=\Omega r, \quad j_r=j_\theta=0 \end{cases} \quad (9a)$$

これを回転座標系における境界条件で表せば, 次式のようになる.

$$\begin{cases} z=0: & u=w=0, \quad \hat{v}=\omega r, \quad j_z=0 \\ z \rightarrow \infty: & u=\hat{v}=0, \quad \hat{j}_r=j_\theta=0 \end{cases} \quad (9b)$$

円板半径が無限であり相似解を仮定するとき, 境界層の内外の領域において $\partial w/\partial r=0$ が成り立つ. 式(4)を r で微分し, それを適用すると

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0 \quad (10)$$

この式の意味するところは, 半径方向の圧力勾配が軸方向に変化しないということである. つまり,

$$\frac{\partial p(r, z)}{\partial r} = f(r) \quad (11)$$

となる. 次に, 式(1)-(9)を無次元化するにあたり, 以下のように無次元変数を置く.

$$\begin{aligned} R &= \frac{r}{r_a}, \quad Z = \frac{z}{z_a}, \quad U = \frac{u}{u_a}, \quad \hat{V} = \frac{\hat{v}}{v_a}, \quad W = \frac{w}{w_a}, \\ \hat{J}_R &= \frac{\hat{j}_r}{j_{ra}}, \quad J_\theta = \frac{j_\theta}{j_{\theta a}}, \quad J_Z = \frac{j_z}{j_{za}} \end{aligned} \quad (12)$$

大文字は無次元変数を示し, 右辺の下付添え字 a が付くものが未定参照量を示す. 式(12)を式(1)他に代入し整理すると,

$$\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{U}{R} + \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]} \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial R} + \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]} W \frac{\partial U}{\partial Z} - \underbrace{\frac{v_a^2}{u_a^2}}_{[4]} \frac{\hat{V}^2}{R} &= - \frac{r_a}{\rho u_a^2} \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \underbrace{\frac{v}{r_a u_a}}_{[2]} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R^2} \right) \\ + \underbrace{\frac{v r_a}{z_a^2 u_a}}_{[3]} \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} + \underbrace{\frac{r_a j_{\theta a} B_0}}{\rho u_a^2}}_{[6]} J_\theta &+ 2 \underbrace{\frac{\Omega v_a r_a}{u_a^2}}_{[11]} \hat{V} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
U \frac{\partial \widehat{V}}{\partial R} + \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]} W \frac{\partial \widehat{V}}{\partial Z} + \frac{U \widehat{V}}{R} = \underbrace{\nu}_{[2]} \left(\frac{\partial^2 \widehat{V}}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \widehat{V}}{\partial R} - \frac{\widehat{V}}{R^2} \right) \\
+ \underbrace{\frac{\nu r_a}{z_a^2 u_a}}_{[3]} \frac{\partial^2 \widehat{V}}{\partial Z^2} - \underbrace{\frac{r_a j_{ra} B_0}}{\rho u_a v_a}}_{[7]} \widehat{J}_R - 2 \underbrace{\frac{\Omega r_a}{v_a}}_{[5]} \widehat{U}
\end{aligned} \tag{15}$$

$$U \frac{\partial W}{\partial R} + \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]} W \frac{\partial W}{\partial Z} = - \frac{r_a}{\rho u_a w_a} \frac{\partial \widehat{p}}{\partial z} + \underbrace{\nu}_{[2]} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} \right) + \underbrace{\frac{\nu r_a}{z_a^2 u_a}}_{[3]} \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \tag{16}$$

$$\frac{\partial \widehat{J}_R}{\partial R} + \frac{\widehat{J}_R}{R} + \underbrace{\frac{j_{za} r_a}{z_a j_{ra}}}_{[8]} \frac{\partial J_Z}{\partial Z} = 0 \tag{17}$$

$$\widehat{J}_R = - \frac{\sigma}{j_{ra}} \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial r} + \underbrace{\frac{\sigma v_a B_0}{j_{ra}}}_{[9]} \widehat{V} \tag{18a}$$

$$J_\theta = - \underbrace{\frac{\sigma u_a B_0}{j_{\theta a}}}_{[10]} U \tag{18b}$$

$$J_Z = - \frac{\sigma}{j_{za} z_a} \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial Z} \tag{18c}$$

境界条件(9b)についても無次元化を行う。

$$\begin{cases} Z = 0: & U = W = 0, \quad \widehat{V} = \underbrace{\frac{\omega r_a}{v_a}}_{[12]} R, \quad J_Z = 0 \\ Z \rightarrow \infty: & U = \widehat{V} = 0, \quad \widehat{J}_R = J_\theta = 0 \end{cases} \tag{19}$$

無次元速度や電流密度などは、以下の無次元量に依存することがわかる。

$$(\vec{U}, \vec{J}) = f \left(\begin{array}{c} R, Z, \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]}, \underbrace{\frac{\nu}{r_a u_a}}_{[2]}, \underbrace{\frac{\nu r_a}{z_a^2 u_a}}_{[3]}, \underbrace{\frac{v_a^2}{u_a^2}}_{[4]}, \underbrace{\frac{\Omega r_a}{v_a}}_{[5]}, \underbrace{\frac{r_a j_{\theta a} B_0}}{\rho u_a^2}}_{[6]}, \underbrace{\frac{r_a j_{ra} B_0}}{\rho u_a v_a}}_{[7]}, \\ \underbrace{\frac{j_{za} r_a}{z_a j_{ra}}}_{[8]}, \underbrace{\frac{\sigma v_a B_0}{j_{ra}}}_{[9]}, \underbrace{\frac{\sigma u_a B_0}{j_{\theta a}}}_{[10]}, \underbrace{\frac{\Omega v_a r_a}{u_a^2}}_{[11]}, \underbrace{\frac{\omega r_a}{v_a}}_{[12]} \end{array} \right) \tag{20}$$

これより、[1]から[12]の各無次元量について、未定参照量を決定していく。

$$[12] = 1, [4] = 1 \text{ と置くことにより, } u_a = v_a = \omega r_a \tag{21}$$

$$[3]=1 \text{ と置くことにより, 式(21)を代入し, } z_a = \sqrt{\frac{\nu r_a}{u_a}} = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \quad (22)$$

$$[1]=1 \text{ と置くことにより, 式(21)(22)を代入し, } w_a = \frac{z_a u_a}{r_a} = \sqrt{\omega \nu} \quad (23)$$

$$[2] \text{ は } \frac{\nu}{r_a u_a} = \frac{\nu}{\omega r_a^2} \equiv \frac{1}{Re_\omega} \text{ (後にわかるがここは無関係)}$$

$$[9]=1, [10]=1 \text{ と置くことにより, } j_{ra} = j_{\theta a} = \sigma u_a B_0 = \sigma r_a \omega B_0 \quad (24)$$

$$[8]=1 \text{ より, } \frac{j_{za} r_a}{z_a j_{ra}} = 1 \Rightarrow j_{za} = \frac{z_a j_{ra}}{r_a} = \frac{z_a \sigma r_a \omega B_0}{r_a} = \sigma B_0 \sqrt{\nu \omega} \quad (25)$$

$$[6]=[7] = \frac{r_a j_{\theta a} B_0}{\rho u_a^2} = \frac{r_a \sigma r_a \omega B_0 B_0}{\rho (\omega r_a)^2} = \frac{\sigma B_0^2}{\rho \omega} \equiv N \quad (26)$$

$$[5],[11] \text{ は, } \frac{\Omega r_a}{v_a} = \frac{\Omega}{\omega} \equiv \gamma \quad (27)$$

ここまでは, r_a を定数として考えて扱ってきたが, さらに $R=1$ と置き, 相似解を仮定する。つまり, 式(12)は次式のように置き換えられる。

$$\begin{aligned} Z = \frac{z}{z_a} = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \equiv \eta, \quad U(\eta) = \frac{u(r, z)}{\omega r}, \quad \hat{V}(\eta) = \frac{\hat{v}(r, z)}{\omega r}, \quad W(\eta) = \frac{w(z)}{\sqrt{\omega \nu}}, \\ \hat{J}_R(\eta) = \frac{\hat{j}_r(r, z)}{\sigma B_0 \omega r}, \quad J_\theta(\eta) = \frac{j_\theta(r, z)}{\sigma B_0 \omega r}, \quad J_z(\eta) = \frac{j_z(z)}{\sigma B_0 \sqrt{\omega \nu}}, \quad \gamma = \frac{\Omega}{\omega} \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)を利用して, 運動方程式の各項を求める。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} = \omega U, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \omega r \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \frac{dU}{d\eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\omega^2 r}{\nu} \frac{d^2 U}{d\eta^2} \\ -\frac{\hat{v}^2}{r} = -\omega^2 r \hat{V}^2, \quad \frac{1}{\rho} j_\theta B_0 = \frac{\sigma B_0^2 \omega}{\rho} r J_\theta \end{aligned}$$

これらを式(2)に代入し,

$$\omega r U \cdot \omega U + \sqrt{\omega \nu} W \cdot \omega r \frac{dU}{d\eta} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} - \omega^2 r V^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \nu \frac{\omega^2 r}{\nu} \frac{d^2 U}{d\eta^2} + \frac{\sigma B_0^2 \omega}{\rho} r J_\theta$$

整理して次式を得る。

$$\underbrace{U^2 + W \frac{dU}{d\eta} - V^2 - \frac{d^2 U}{d\eta^2} - N J_\theta - 2\gamma \hat{V}}_{\text{function of } z} = -\underbrace{\frac{1}{\rho \omega^2 r} \frac{\partial \hat{p}}{\partial r}}_{\text{function of } r} \equiv -\hat{P}_R \quad (29)$$

これからわかるように, 左辺は z の関数であり, 右辺は r の関数であるから, 結局はそれぞれ

れが定数でなければならない．右辺に示される無次元の半径方向圧力勾配を次式で定義する．

$$\hat{P}_R \equiv \frac{1}{\rho\omega^2 r} \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} = \frac{f(r)}{\rho\omega^2 r} = \frac{k_p}{\rho\omega^2} = \text{const.} \quad (30)$$

ここで、 k_p は一定値であり、境界層外のポテンシャル流の状況から決めることができる．

式(30)を r で積分して、次式のように圧力分布が r の関数と z の関数の和として表現されることが示される．

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} = k_p r \Rightarrow \hat{p}(r, z) = \frac{1}{2} k_p r^2 + p_2(z) \quad (31)$$

では、 k_p を求める．ポテンシャル領域では、回転座標系からみて流速はゼロであるので、

オイラーの運動方程式から次式を得る．

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} = 0, \Rightarrow k_p = 0 \quad (32)$$

無次元圧力勾配は、式(30)から $\hat{P}_R = 0$ となり、結局、半径方向および周方向の運動方程式は、

次式のようになる．

$$U^2 + W \frac{dU}{d\eta} - \hat{V}^2 = \frac{d^2 U}{d\eta^2} + N J_\theta + 2\gamma \hat{V} \quad (33)$$

$$2U \hat{V} + W \frac{d\hat{V}}{d\eta} = \frac{d^2 \hat{V}}{d\eta^2} - N J_R - 2\gamma U \quad (34)$$

また連続の式は、即座に以下のように得られる．

$$2U + \frac{dW}{d\eta} = 0 \quad (35)$$

一方で、電荷保存則に関しても同様にして次式を得ることができる．

$$2\hat{J}_R + \frac{dJ_Z}{d\eta} = 0 \quad (36)$$

半径方向のオームの式は、

$$\underbrace{\hat{J}_R - \hat{V}}_{\text{function of } z} = - \underbrace{\frac{1}{B_0 \Omega r} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r}}_{\text{function of } r} \equiv -\hat{\Phi}_R \quad (37)$$

となるが、これからわかるように、左辺は z の関数であり、右辺は r の関数であるから、結局はそれぞれが定数でなければならない．右辺に示される無次元の半径方向電位勾配を次式で定義する．

$$\hat{\Phi}_R \equiv \frac{1}{B_0 \Omega r} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} = \frac{k_\phi}{B_0 \Omega} = \text{const.} \quad (38)$$

ここで、 k_ϕ は一定値であり、ポテンシャル領域における状態から決めることができる。今は、ポテンシャル領域では半径方向の電位勾配は

$$\hat{j}_r = \sigma \left(-\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} + \hat{v} B_0 \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} = \hat{v} B_0 = 0 \Rightarrow \hat{\Phi}_R = 0 \quad (39)$$

であり、これが境界層内でも成立する。結局、以下のように単純になる。

$$\hat{J}_R = \hat{V} \quad (40)$$

続いて、式(4)の軸方向の運動方程式は、後にわかるが、圧力を求めるためだけに使われる。

$p_2(z) = \rho \omega \nu P(\eta)$ と置けば、

$$W \frac{dW}{d\eta} = -\frac{dP}{d\eta} + \frac{d^2 W}{d\eta^2} \quad (41)$$

を得る。最終的に、無次元量の定義は以下の通りである。

$$\eta = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}, \quad u(r, z) = \omega r \cdot U(\eta), \quad \hat{v}(r, z) = \omega r \cdot \hat{V}(\eta), \quad (42)$$

$$w(z) = \sqrt{\omega \nu} \cdot W(\eta), \quad \hat{p}(r, z) = p_2(z) = \rho \omega \nu \cdot P(\eta), \quad N = \frac{\sigma B_0^2}{\rho \omega}, \quad \gamma = \frac{\Omega}{\omega}$$

数式のまとめ

以下の連立常微分方程式を反復法などで解く。

$$2U + W' = 0 \quad W \text{ を求める} \quad (43)$$

$$-U^2 - WU' + \hat{V}^2 + U'' - NU + 2\gamma \hat{V} = 0 \quad U \text{ を求める} \quad (44)$$

$$-2U\hat{V} - W\hat{V}' + \hat{V}'' - N\hat{V} - 2\gamma U = 0 \quad V \text{ を求める} \quad (45)$$

B.C.

$$\begin{cases} \eta = 0: & U = W = J_z = 0, \quad \hat{V} = 1 \\ \eta \rightarrow \infty: & U = \hat{V} = 0 \end{cases} \quad (46)$$

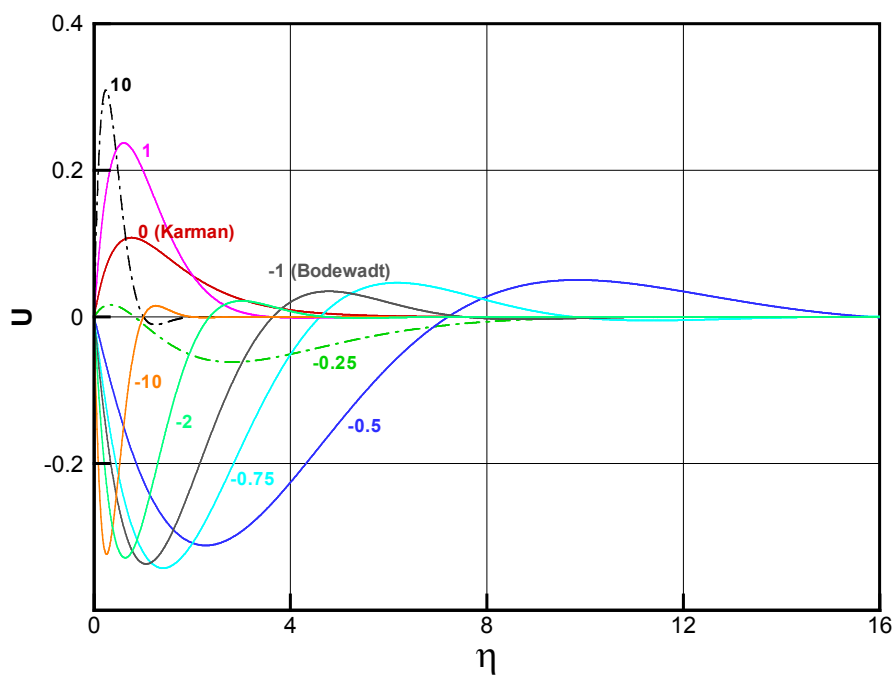
$\gamma = 0$ (遠方の流体が静止) のときは、Kármán 境界層流れとなる。 $\gamma = -1$ (遠方の流体が円板と逆回転) のときは、Bödewadt 境界層流れとなる。

以下の各変数は速度を得るための計算には必要ではないが、もし求めるなら次式のように与えられる.

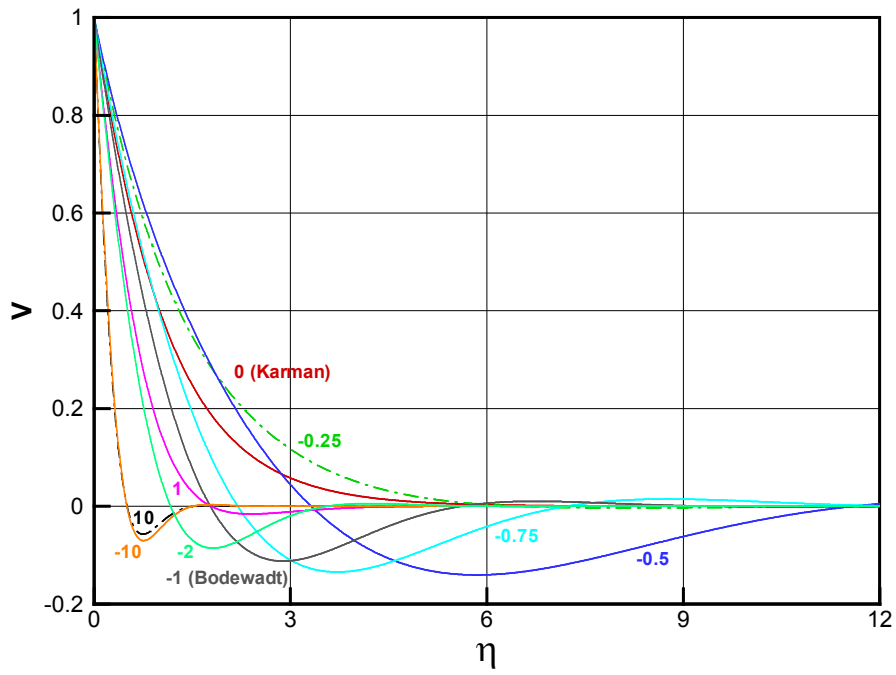
$\hat{J}_R = \hat{V}$	J_R は V に同じ
$J_\theta = -U$	J_θ は U に負号をつけたもの
$P = -\frac{1}{2}W^2 + W'$	P を求める
$2\hat{J}_R + J_Z' = 0$	J_Z を求める
$J_Z + \Phi' = 0$	Φ を求める

今回は任意の γ の値に対して、どのような流れ場になるかを数値計算により検討する. 特に $\gamma \gg 1$ の場合は、コリオリ力に対して慣性力が無視できるので、方程式系が線形化され、いわゆる Ekman 境界層となり、これに焦点をあてる.

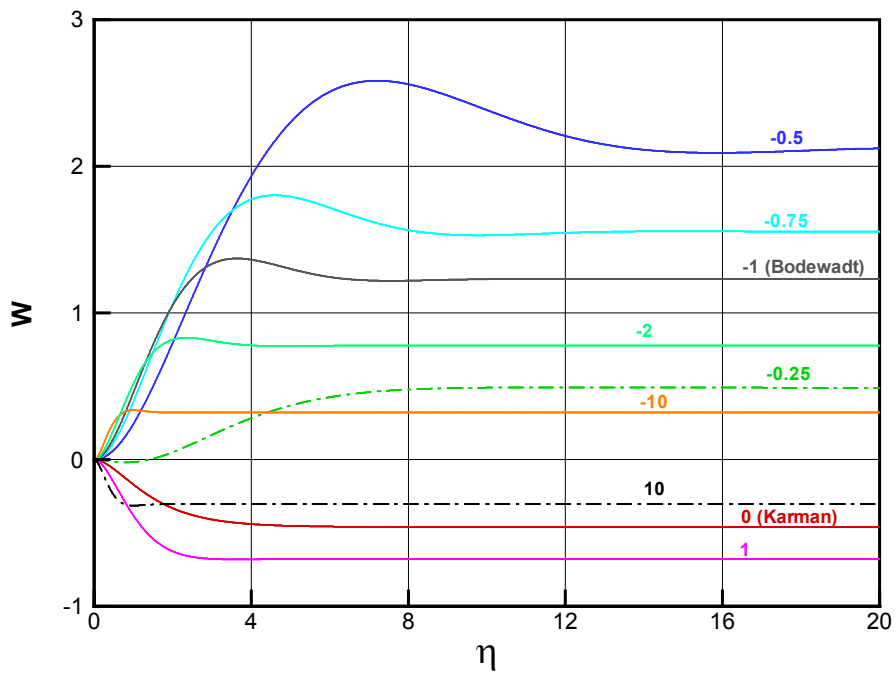
解析結果



(a) 半径方向の速度成分



(b) 周方向の速度成分



(c) 軸方向の速度成分

図1 流れに及ぼす回転比 γ の影響 ($N=0.5$)

図1に示されるように、回転比に応じて様々な速度分布を得る。(a)の半径方向の速度成分を見れば、およそ $\gamma = -0.25$ の値を境にして、正負の値が反転している。境界層厚さは、-0.5くらいで最大をとる。 γ の絶対値が大きくなると、境界層は薄くなるのが見て取れる。(b)の周方向の速度成分においては、 $\gamma = \pm 10$ の曲線はほぼ一致している。これは慣性力の影響がほぼ無視できることを示している。(c)の軸方向速度成分では、 $\gamma = \pm 10$ の曲線は正負を反転している。 $\gamma = -10$ では円板と外部流が逆向きであり、弱い上昇流が生じるのに対し、 $\gamma = 10$ では円板と外部流が同じ向きであり、弱い下降流が生じる。回転比 γ が大きいときは、その正負に依存して上昇または下降流が生じるが、それは非常に弱く無視できる。

○Ekman 境界層 ($\gamma \gg 1, N=0$ の場合)

慣性項を無視して、 γ が現れないように無次元化する。解くべき方程式は、

$$2U + W' = 0 \quad W \text{ を求める} \quad (47)$$

$$U'' + 2\hat{V} = 0 \quad U \text{ を求める} \quad (48)$$

$$\hat{V}'' - 2U = 0 \quad V \text{ を求める} \quad (49)$$

となる。ただし、変数の定義は以下の通り、変更されている。

$$\zeta = z \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}, \quad u(r, z) = \omega r \cdot U(\zeta), \quad \hat{v}(r, z) = \omega r \cdot \hat{V}(\zeta),$$

$$w(z) = \omega \sqrt{\nu / \Omega} \cdot W(\zeta), \quad \hat{p}(r, z) = p_2(z) = \rho \omega \nu \cdot P(\zeta)$$

理論解は、次式で与えられる。振動平板上の流れの解と類似している。

$$\begin{cases} U = \exp(-\zeta) \sin(\zeta) \\ \hat{V} = \exp(-\zeta) \cos(\zeta) \\ W = \exp(-\zeta) [\sin(\zeta) + \cos(\zeta)] - 1 \\ P = -2 \exp(-\zeta) \sin(\zeta) \end{cases} \quad (50)$$

図2, 3に可視化結果を示す。

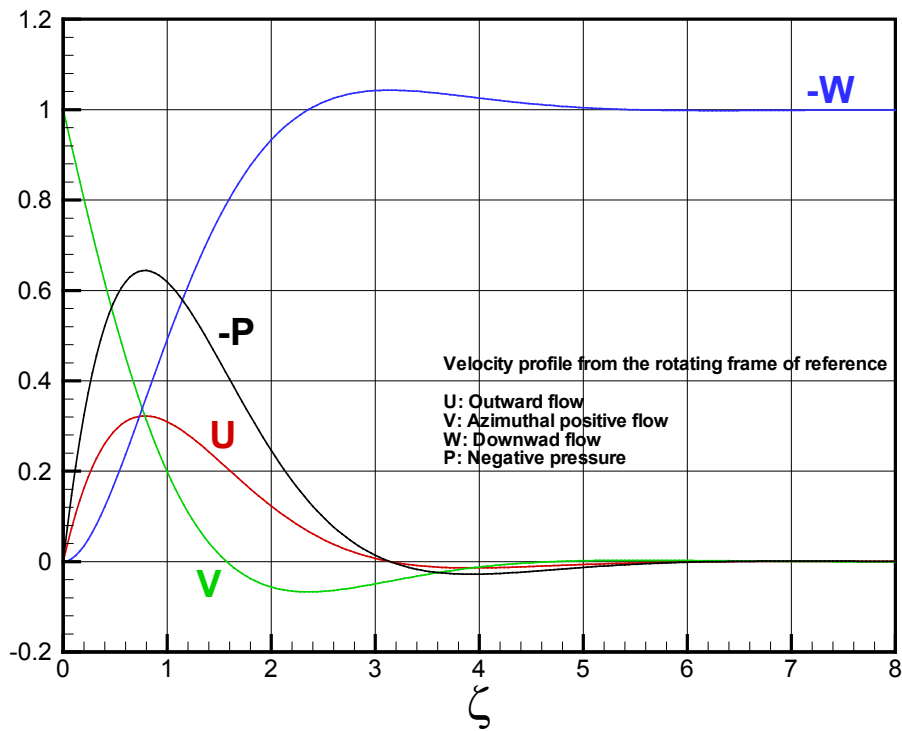


図2 Ekman 境界層の速度分布 ($\gamma \rightarrow \infty$)

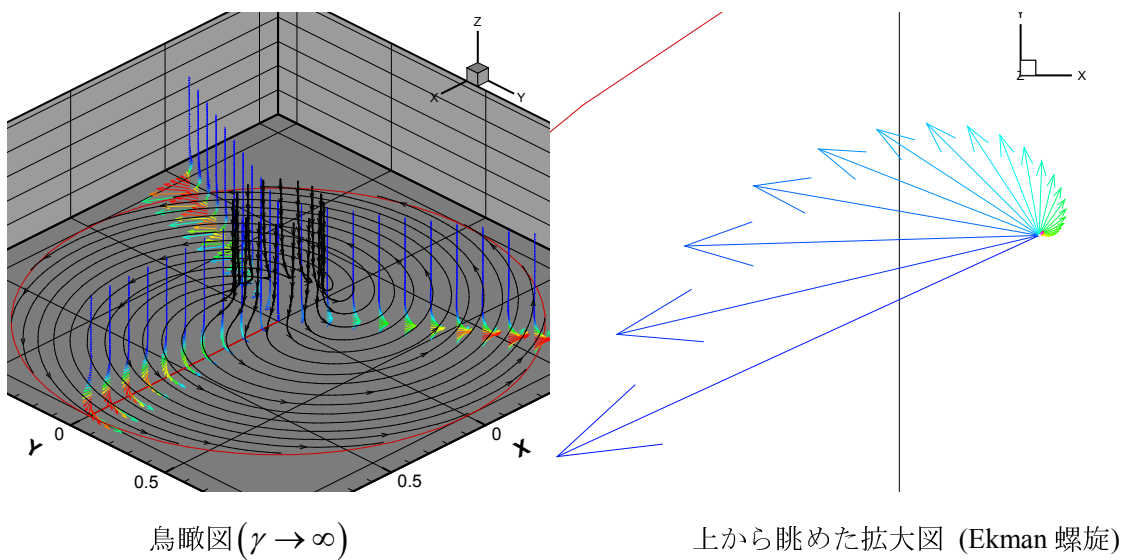


図3 Ekman 境界層の三次元可視化