

一様軸方向磁場下における回転円板による流れ

本稿では、非圧縮性流れを仮定した Navier-Stokes 方程式の厳密解の一例として、静止導電性流体中に置かれた一定角速度 ω で回転する円板が誘起する流れを考える。回転円板の軸に平行な一様な磁場があり、その壁面から十分に離れた領域では、粘性の影響はなく、円板に向かう一様な流れと見なされる。今、 u, v, w はそれぞれ、半径方向、周方向、軸方向の速度成分とする。軸対称流れを仮定した円筒座標系の連続の式、Navier-Stokes の運動方程式、電荷保存則およびオームの法則は、以下のように与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho} j_\theta B_0 \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} j_r B_0 \quad (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial j_r}{\partial r} + \frac{j_r}{r} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

$$j_r = \sigma \left(-\frac{\partial \phi}{\partial r} + v B_0 \right) \quad (6)$$

$$j_\theta = \sigma (-u B_0) \quad (7)$$

$$j_z = \sigma \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (8)$$

境界条件は、壁面で滑り無しの絶縁とし、無限遠では流体は静止しているとする。

$$\begin{cases} z=0: & u=w=0, \quad v=\omega r, \quad j_z=0 \\ z \rightarrow \infty: & u=v=0, \quad j_r=j_\theta=0 \end{cases} \quad (9)$$

円板半径が無限であり相似解を仮定するとき、境界層の内外の領域において $\partial w / \partial r = 0$ が成り立つ。式(4)を r で微分し、それを適用すると

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0 \quad (10)$$

この式の意味するところは、半径方向の圧力勾配が軸方向に変化しないということである。
つまり、

$$\frac{\partial p(r, z)}{\partial r} = f(r) \quad (11)$$

となる。次に、式(1)-(8)を無次元化するにあたり、以下のように無次元変数を置く。

$$\begin{aligned} R &= \frac{r}{r_a}, \quad Z = \frac{z}{z_a}, \quad U = \frac{u}{u_a}, \quad V = \frac{v}{v_a}, \quad W = \frac{w}{w_a}, \\ J_R &= \frac{j_r}{j_{ra}}, \quad J_\theta = \frac{j_\theta}{j_{\theta a}}, \quad J_Z = \frac{j_z}{j_{za}} \end{aligned} \quad (12)$$

大文字は無次元変数を示し、右辺の下付添え字 a が付くものが未定参照量を示す。式(12)を式(1)から式(8)に代入し整理すると、

$$\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{U}{R} + \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]} \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial R} + \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]} W \frac{\partial U}{\partial Z} - \underbrace{\frac{v_a^2}{u_a^2}}_{[4]} \frac{V^2}{R} &= - \frac{r_a}{\rho u_a^2} \frac{\partial p}{\partial r} + \underbrace{\frac{v}{r_a u_a}}_{[2]} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R^2} \right) \\ &+ \underbrace{\frac{v r_a}{z_a^2 u_a}}_{[3]} \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} + \underbrace{\frac{r_a j_{\theta a} B_0}{\rho u_a^2}}_{[6]} J_\theta \end{aligned} \quad (14)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial R} + \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]} W \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{UV}{R} = \underbrace{\frac{v}{r_a u_a}}_{[2]} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2} \right) + \underbrace{\frac{v r_a}{z_a^2 u_a}}_{[3]} \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} - \underbrace{\frac{r_a j_{ra} B_0}{\rho u_a v_a}}_{[7]} J_R \quad (15)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial R} + \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]} W \frac{\partial W}{\partial Z} = - \frac{r_a}{\rho u_a w_a} \frac{\partial p}{\partial z} + \underbrace{\frac{v}{r_a u_a}}_{[2]} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} \right) + \underbrace{\frac{v r_a}{z_a^2 u_a}}_{[3]} \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial J_R}{\partial R} + \frac{J_R}{R} + \underbrace{\frac{j_{za} r_a}{z_a j_{ra}}}_{[8]} \frac{\partial J_Z}{\partial Z} = 0 \quad (17)$$

$$J_R = - \frac{\sigma}{j_{ra}} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \underbrace{\frac{\sigma v_a B_0}{j_{ra}}}_{[9]} V \quad (18)$$

$$J_\theta = - \underbrace{\frac{\sigma u_a B_0}{j_{\theta a}}}_{[10]} U \quad (19)$$

$$J_z = -\frac{\sigma}{j_{za}} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (20)$$

境界条件(9)についても無次元化を行う。

$$\begin{cases} Z=0: & U=W=0, \quad V = \frac{\omega r_a}{\underbrace{v_a}_{[5]}} R, \quad J_z = 0 \\ Z \rightarrow \infty: & U=V=0, \quad J_R = J_\theta = 0 \end{cases} \quad (21)$$

無次元の速度や電流密度は、以下の無次元量に依存することがわかる。

$$(\vec{U}, \vec{J}) = f \left(\begin{array}{c} R, Z, \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]}, \underbrace{\frac{v}{r_a u_a}}_{[2]}, \underbrace{\frac{v r_a}{z_a^2 u_a}}_{[3]}, \underbrace{\frac{v_a^2}{u_a^2}}_{[4]}, \underbrace{\frac{\omega r_a}{v_a}}_{[5]}, \\ \underbrace{\frac{r_a j_{\theta a} B_0}{\rho u_a^2}}_{[6]}, \underbrace{\frac{r_a j_{ra} B_0}{\rho u_a v_a}}_{[7]}, \underbrace{\frac{j_{za} r_a}{z_a j_{ra}}}_{[8]}, \underbrace{\frac{\sigma v_a B_0}{j_{ra}}}_{[9]}, \underbrace{\frac{\sigma u_a B_0}{j_{\theta a}}}_{[10]} \end{array} \right) \quad (22)$$

これより、[1]から[10]の各無次元量について、未定参照量を決定していく。

$$[5]=1, [4]=1 \text{ と置くことにより, } u_a = v_a = \omega r_a \quad (23)$$

$$[3]=1 \text{ と置くことにより, 式(23)を代入し, } z_a = \sqrt{\frac{v r_a}{u_a}} = \sqrt{\frac{v}{\omega}} \quad (24)$$

$$[1]=1 \text{ と置くことにより, 式(23)(24)を代入し, } w_a = \frac{z_a u_a}{r_a} = \frac{\sqrt{v/\omega} \cdot \omega r_a}{r_a} = \sqrt{\omega v} \quad (25)$$

$$[2] \text{ は } \frac{v}{r_a u_a} = \frac{v}{\omega r_a^2} \equiv \frac{1}{Re_\omega} \text{ (後にわかるがここは無関係)}$$

$$[9]=1, [10]=1 \text{ と置くことにより, } j_{ra} = j_{\theta a} = \sigma u_a B_0 = \sigma r_a \omega B_0 \quad (26)$$

$$[8]=1 \text{ より, } \frac{j_{za} r_a}{z_a j_{ra}} = 1 \Rightarrow j_{za} = \frac{z_a j_{ra}}{r_a} = \frac{z_a \sigma r_a \omega B_0}{r_a} = \sigma \omega B_0 \sqrt{\frac{v}{\omega}} \quad (27)$$

$$[6]=[7] = \frac{r_a j_{\theta a} B_0}{\rho u_a^2} = \frac{r_a \sigma r_a \omega B_0 B_0}{\rho (\omega r_a)^2} = \frac{\sigma B_0^2}{\rho \omega} \equiv N \quad (28)$$

ここまでは、 r_a を定数として考えて扱ってきたが、さらに $R=1$ と置き、相似解を仮定する。つまり、式(12)は次式のように置き換えられる。

$$\begin{aligned}
Z = \frac{z}{z_a} = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \equiv \eta, \quad U(\eta) = \frac{u(r, z)}{\omega r}, \quad V(\eta) = \frac{v(r, z)}{\omega r}, \quad W(\eta) = \frac{w(z)}{\sqrt{\omega \nu}}, \\
J_R(\eta) = \frac{j_r(r, z)}{\sigma B_0 \omega r}, \quad J_\theta(\eta) = \frac{j_\theta(r, z)}{\sigma B_0 \omega r}, \quad J_z(\eta) = \frac{j_z(z)}{\sigma B_0 \sqrt{\omega \nu}}
\end{aligned} \tag{29}$$

式(29)を利用して、運動方程式の各項を求める。

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(\omega r U) = \omega \left(U + r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \omega \left(U + r \frac{dU}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) = \omega U$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\omega r U) = \omega r \frac{dU}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \omega r \frac{dU}{d\eta} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r}(\omega U) = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{\omega U}{r} - \frac{\omega U}{r} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\omega r \frac{dU}{d\eta} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right) = \omega r \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \frac{d^2 U}{d\eta^2} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = \frac{\omega^2 r}{\nu} \frac{d^2 U}{d\eta^2}$$

$$-\frac{v^2}{r} = -\frac{(\omega r V)^2}{r} = -\omega^2 r V^2$$

$$\frac{1}{\rho} j_\theta B_0 = \frac{\sigma B_0^2 \omega}{\rho} r J_\theta$$

これらを式(2)に代入し、

$$\omega r U \cdot \omega U + \sqrt{\omega \nu} W \cdot \omega r \frac{dU}{d\eta} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} - \omega^2 r V^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\omega^2 r}{\nu} \frac{d^2 U}{d\eta^2} + \frac{\sigma B_0^2 \omega}{\rho} r J_\theta$$

整理して次式を得る。

$$\underbrace{U^2 + W \frac{dU}{d\eta} - V^2 - \frac{d^2 U}{d\eta^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho \omega} J_\theta}_{\text{function of } z} = -\underbrace{\frac{1}{\rho \omega^2 r} \frac{\partial p}{\partial r}}_{\text{function of } r} \equiv -P_R \tag{30}$$

これからわかるように、左辺は z の関数であり、右辺は r の関数であるから、結局はそれぞれが定数でなければならない。右辺に示される無次元の半径方向圧力勾配を次式で定義する。

$$P_R \equiv \frac{1}{\rho \omega^2 r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{f(r)}{\rho \omega^2 r} = \frac{k_p}{\rho \omega^2} = \text{const.} \tag{31}$$

ここで、 k_p は一定値であり、境界層外のポテンシャル流の状況から決めることができる。

式(31)を r で積分して、次式のように圧力分布が r の関数と z の関数の和として表現されることが示される。

$$\frac{\partial p}{\partial r} = k_p r \Rightarrow p(r, z) = \frac{1}{2} k_p r^2 + p_2(z) \quad (32)$$

では、 k_p を求める。ポテンシャル領域では $u = v = j_\theta = 0$ であるので、オイラーの運動方程式は次式で与えられる。

$$\cancel{u} \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

これより

$$k_p = 0 \quad (33)$$

無次元圧力勾配は、式(31)から $P_R = 0$ となり、結局、半径方向および周方向の運動方程式は、次式のようになる。

$$U^2 + W \frac{dU}{d\eta} - V^2 = \frac{d^2 U}{d\eta^2} + N J_\theta \quad (34)$$

$$2UV + W \frac{dV}{d\eta} = \frac{d^2 V}{d\eta^2} - N J_R \quad (35)$$

また連続の式は、即座に以下のように得られる。

$$2U + \frac{dW}{d\eta} = 0 \quad (36)$$

一方で、電荷保存則に関しても同様にして次式を得ることができる。

$$2J_R + \frac{dJ_Z}{d\eta} = 0 \quad (37)$$

半径方向のオームの式は、

$$\underbrace{J_R - V}_{\text{function of } z} = -\frac{1}{\underbrace{B_0 \omega r}_{\text{function of } r}} \frac{\partial \phi}{\partial r} \equiv -\Phi_R \quad (38)$$

となるが、これからわかるように、左辺は z の関数であり、右辺は r の関数であるから、結局はそれぞれが定数でなければならない。右辺に示される無次元の半径方向電位勾配を次式で定義する。

$$\Phi_R \equiv \frac{1}{B_0 \omega r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{k_\phi}{B_0 \omega} = \text{const.} \quad (39)$$

ここで、 k_ϕ は一定値であり、ポテンシャル領域における状態から決めることができる。今

は、ポテンシャル領域では半径方向の電位勾配はゼロであり、これが境界層内でも通用する。結局、以下のように単純になる。

$$J_R = V \quad (40)$$

続いて、式(4)の軸方向の運動方程式は、後にわかるが、圧力を求めるためだけに使われる。

$p_2(z) = \rho\omega v P(\eta)$ と置けば、

$$W \frac{dW}{d\eta} = -\frac{dP}{d\eta} + \frac{d^2W}{d\eta^2} \quad (41)$$

を得る。

最終的に、無次元量の定義は以下の通りである。

$$\begin{aligned} \eta &= z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}, \quad u(r, z) = \omega r \cdot U(\eta), \quad v(r, z) = \omega r \cdot V(\eta), \\ w(z) &= \sqrt{\omega \nu} \cdot W(\eta), \quad p(r, z) = p_2(z) = \rho\omega \nu \cdot P(\eta), \quad N = \frac{\sigma B_0^2}{\rho\omega} \end{aligned} \quad (42)$$

数式のまとめ

以下の連立常微分方程式を反復法などで解く。

$$\begin{aligned} 2U + W' &= 0 && W \text{ を求める} \\ -U^2 - WU' + V^2 + U'' - NU &= 0 && U \text{ を求める} \\ -2UV - WV' + V'' - NV &= 0 && V \text{ を求める} \end{aligned}$$

B.C.

$$\begin{cases} \eta = 0: & U = W = J_z = 0, \quad V = 1 \\ \eta \rightarrow \infty: & U = V = 0 \end{cases}$$

以下の各変数は速度を得るための計算には必要ではないが、もし求めるなら次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} J_R &= V && J_R \text{ は } V \text{ に同じ} \\ J_\theta &= -U && J_\theta \text{ は } U \text{ に負号をつけたもの} \\ P &= -\frac{1}{2}W^2 + W' && P \text{ を求める} \\ 2J_R + J_z' &= 0 && J_z \text{ を求める} \\ J_z + \Phi' &= 0 && \Phi \text{ を求める} \end{aligned}$$

図 1 に数値計算結果を示す。壁面の速度勾配は、 N の値によって変化する。

解析結果

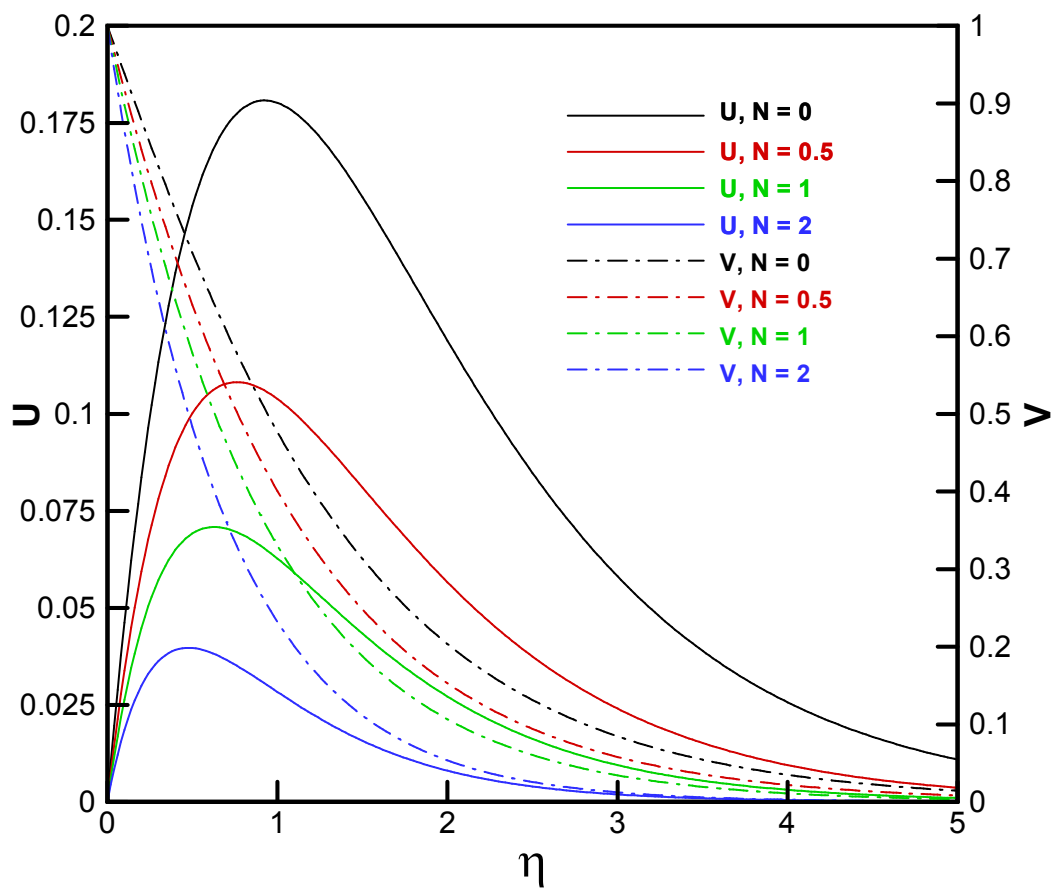


図1 回転円板による流れに及ぼす磁場の影響
(N は相互作用係数)