一様磁場下における液体金属ダクト流の線形安定性

はじめに

一様磁場下における液体金属ダクト流の線形安定性を数値的に解析する．液体金属は非圧縮性ニュートン流体であると仮定し，矩形断面を有するダクト内を一定の圧力勾配によって駆動される．擾乱は基本流の方向に沿って正弦波の周期性を持つと仮定する．有限差分法に HSMAC 法を適用して，ハルトマン数のみに依存する基本流れの線形安定性が解析される．一般化固有値問題の解を求めるためにニュートン・ラプソン法を用いる．比較的弱いハルトマン数において，中立安定状態としてのレイノルズ数および進行波の位相速度が得られることを示す．

解析モデルと支配方程式

図 1 は，本稿で検討する電磁流体ダクト流れの模式図を示す．ダクト断面は長方形であり，そのアスペクト比は 5 とする．これは，アスペクト比が小さいダクト流れは線形安定であることが知られている[1]ためである．主流の方向は Z 方向であり，一様磁場は Y 方向に印加される．Priede *et al.*[2]は一様磁場に平行な 2 つの壁が導電性である場合（Hunt の流れ）を研究したが，本研究では周囲 4 壁が電気的に絶縁されている場合に限定する．

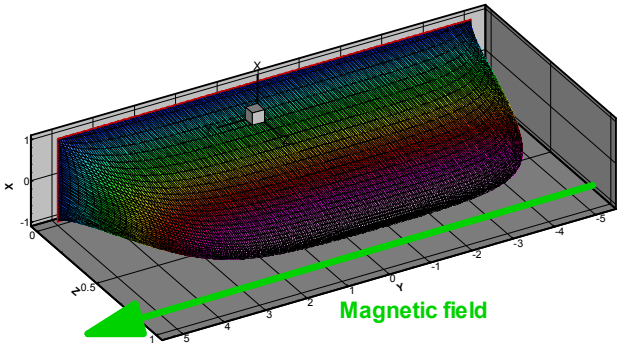


Fig. 1: Sketch of the basic flow under a uniform magnetic field.

液体金属は非圧縮性ニュートン流体であると仮定し，粘性散逸やジュール熱などの熱源は無視される．また磁気レイノルズ数は小さいとし，誘導磁場も無視される．流れ場と電磁場の支配方程式は以下に記述される．

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \varepsilon_{ijk} j_j b_k \tag{2}$$

$$\frac{\partial j_j}{\partial x_j} = 0 \tag{3}$$

$$j_i = \sigma\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \varepsilon_{ijk} u_j b_k \right) \tag{4}$$

境界条件は以下のとおりである．ここで，$2h$ はダクトの高さ，$2a$ はダクトのスパン方向の長さを表す．

$$x_1 = \pm h: \quad u_1 = u_2 = u_3 = j_1 = 0, \quad \text{and} \quad x_2 = \pm a: \quad u_1 = u_2 = u_3 = j_2 = 0 \tag{5}$$

計算方法と結果

主流方向に沿った周期性を考慮し，微小擾乱を次の形式で与える．

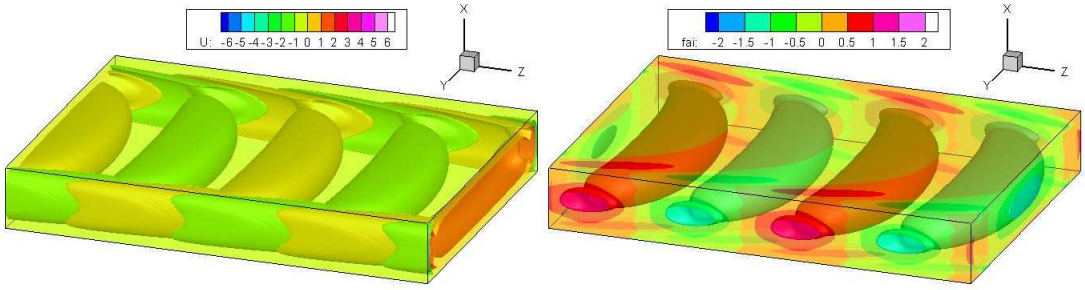
$$\frac{u_i'}{\tilde{u}_i(x,y)} = \frac{p'}{\tilde{p}(x,y)} = \frac{j_i'}{\tilde{j}_i(x,y)} = \frac{\varphi'}{\tilde{\varphi}(x,y)} = \exp(\mathrm{i}kz - st), \quad s = s_r + \mathrm{i}s_i \tag{6}$$

ここで，分母に付された $\tilde{}$ 記号は複素振幅を示す．線形化された擾乱方程式系と対応する境界条件は，一般化固有値問題を構成する．連立偏微分方程式は，ダクト断面内の 2 次元等間隔スタガードメッシュシステム上において離散化され，4 次精度中心差分法を用いた有限差分法（HSMAC 法）によって解かれる．ハルトマン数のみに依存する基本状態が得られた後，波数やレイノルズ数を与えて擾乱方程式を数値的に解き，線形増幅率と角振動数を得る．さらにレイノルズ数を調整することにより，増幅率ゼロの解を得る．その際，複素固有値の決定には，ニュートン・ラプソン法が用いられた[3]．

図 2 は，$A = 5$，$Ha = 1$ の条件における臨界状態における鉛直速度成分と電位の等値面を示す．得られた Re や α などは図キャプションに示されるとおりである．ここで，A はこの断面のアスペクト比，Ha はハルトマン数，Re はレイノルズ数，α は無次元波数，S の実部は線型増幅率，S の虚部は角振動数を表し，それらの定義は以下の通りである．なお，代表速度 u_{ref} は，磁場が印加されていない状態で無次元最大基本流の値が 1 となるように決定される．

$$u_{ref} = -\frac{h^2 d\overline{p}(z)/dz}{2\rho\nu}, \quad A = \frac{a}{h}, \quad Ha = b_0 h\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}, \quad Re = \frac{u_{ref} h}{\nu}, \quad \alpha = kh, \quad S = \frac{s}{u_{ref}/h} \tag{7}$$

(a)と(b)はどちらも，コア領域における Tollmien-Schlighting（T-S）波の瞬間プロファイルを示す．この波は，無次元位相速度 0.2297 で z 方向に前進する．



(a) Vertical component of velocity　　(b) Electric potential

Fig. 2: Iso-surfaces of eigenfunctions visualized within the region of two wavelengths at a neutral stability state for $A = 5$, $Ha = 1$, $Re = 1.093\times10^4$, $\alpha = 0.9129$, $S_R = 0$ and $S_I = 2.097$.

まとめ

一様磁場下において矩形ダクト内を一定圧力勾配によって駆動される液体金属流の線形安定性を数値的に調査した．攪乱は基本流れ方向に沿って正弦波周期性を持つと仮定した．偏微分系の攪乱方程式は，HSMAC 法を用いた有限差分法によって離散化され，ニュートン法により複素固有値が求められた．比較的弱いハルトマン数において，臨界状態でのレイノルズ数と波の位相速度が求められることを示した．

記号表

本稿で使用したものを示す．

a: spanwise half-length of duct (m),

A: aspect ratio (-),

b_i: magnetic flux density vector (T),

b_0; strength of magnetic flux density (T),

h: half-height of duct (m),

Ha: Hartmann number (-),

i: imaginary unit (-),

j_i: electric current density vector (A/m^2),

k: streamwise wavenumber (-),

p: pressure (Pa),

Re: Reynolds number (-),

s: complex angular frequency (rad/s),

S_I: dimensionless angular frequency (-),

S_R: dimensionless linear growth rate (-),

t: time (s),

u_i: velocity vector (m/s),

u_{ref}: reference velocity (m/s),

α: dimensionless wavenumber (-),

μ: viscosity (Pa s),

ρ: density (kg/m^3),

σ: electric conductivity (Ω^{-1}m^{-1}),

φ: electric potential (V)

参考文献

[1] T. Tatsumi and T. Yoshimura, Stability of the laminar flow in a rectangular duct, *J. Fluid Mech.* 212, 437-449, 1990.

[2] J. Priede, S. Aleksandrova and S. Molokov, Linear stability of Hunt's flow, *J. Fluid Mech.* 649, 115-134, 2010.

[3] T. Tagawa, Linear stability analysis of liquid metal flow in an insulating rectangular duct under external uniform magnetic field, *Fluids* 4(4), 177, 2019.