

## 円筒形導体内の磁場の拡散

別の磁場の拡散モデルとして、無限に長いソレノイドコイル中に置かれた無限に長い円筒形の導体を考える。コイルに交流電流を流すと、軸方向の磁場が発生する。導体内に浸透する磁場分布を求めたい。このとき、基礎方程式は次の拡散方程式で与えられる。

$$\frac{\partial B_z(r,t)}{\partial t} = \nu_m \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) B_z(r,t), \quad (r > 0) \quad (1)$$

境界条件は、以下のように与えるものとする。

$$r = 0: \quad \frac{\partial B_z(r,t)}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

$$r = a: \quad B_z(r,t) = B_0 \cos \omega t \quad (3)$$

ここで、 $B_z$  は求めるべき磁場の  $z$  成分（軸方向成分）であり、 $\omega$  [rad/s] は磁場の角振動数である。これらの境界条件を満たす振動解を次のように仮定する。

$$B_z(r,t) = \Re \left[ \tilde{B}_z(r) \cdot e^{i\omega t} \right] \quad (4)$$

ここに、 $i$  は虚数単位であり、 $\Re$  は実数部分をとることを意味する。 $\tilde{B}_z$  は  $r$  を変数とする複素関数である。つまり、

$$\tilde{B}_z(r) = \tilde{B}_r(r) + i\tilde{B}_i(r) \quad (5)$$

と実部と虚部から成る。式(1)における磁場を、 $\tilde{B}_z(r) \cdot e^{i\omega t}$  として代入すると、

$$\text{左辺: } \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \tilde{B}_z e^{i\omega t} \right] = i\omega e^{i\omega t} \tilde{B}_z,$$

$$\text{右辺: } \nu_m \left( \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) = \nu_m \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\tilde{B}_z e^{i\omega t}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{B}_z e^{i\omega t}) \right) = \nu_m \left( \frac{d^2 \tilde{B}_z}{dr^2} e^{i\omega t} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{B}_z}{dr} e^{i\omega t} \right)$$

となる。したがって、式(1)は次式となる。

$$i\omega e^{i\omega t} \tilde{B}_z = \nu_m \left( \frac{d^2 \tilde{B}_z}{dr^2} e^{i\omega t} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{B}_z}{dr} e^{i\omega t} \right)$$

この式を整理すると、次の常微分方程式を得る。

$$\frac{d^2 \tilde{B}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{B}_z}{dr} - \left( \frac{i\omega}{\nu_m} \right) \tilde{B}_z = 0 \quad (6)$$

また、振幅関数に対する境界条件は以下のように与えられる。

$$r = 0: \quad \frac{d\tilde{B}_z}{dr} = 0 \quad (7)$$

$$r = a: \quad \tilde{B}_z = B_0 \quad (8)$$

このベッセルの微分方程式を解析的に考察する代わりに、ここでは数値解法により考察する。式(6)を式(7)および式(8)の境界条件の下、数値的に解く為に、まず式(6)を実部と虚部に分ける。

$$\frac{d^2 \tilde{B}_R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{B}_R}{dr} + \frac{\omega}{v_m} \tilde{B}_I = 0 \quad (9)$$

$$\frac{d^2 \tilde{B}_I}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{B}_I}{dr} - \frac{\omega}{v_m} \tilde{B}_R = 0 \quad (10)$$

境界条件の式(7), (8)も実部と虚部に分けて、

$$r=0: \frac{d\tilde{B}_R}{dr} = 0, \quad \frac{d\tilde{B}_I}{dr} = 0 \quad (11)$$

$$r=a: \tilde{B}_R = B_0, \quad \tilde{B}_I = 0 \quad (12)$$

と書ける。

半無限問題とは異なり、本問題では代表長さは半径  $a$  と決まっているので、無次元系で考えると都合が良い。無次元半径が 1 となり、無次元数としては、ただ一つ

$$W_m \equiv \frac{\omega a^2}{v_m} = \sigma \mu_m \omega a^2 \quad (13)$$

が現れる。この無次元数は、磁気 Womersley 数あるいはシールドイングパラメータと呼ばれる。ガウス・ザイデル法などの反復法を用いることより、この無次元系の数値計算の実行は容易であり、その数値解析結果を図 1 に示す。縦軸は無次元の振幅関数である。実線はその実部を、一点鎖線は虚部を示す。シールドイングパラメータの値が大きくなるほど、磁場が内部まで浸透できなくなることが示される。

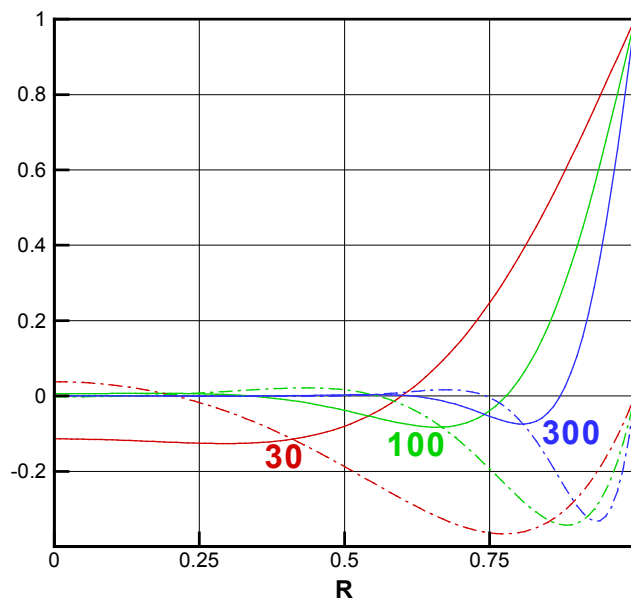


図 1 種々の  $W_m$  値に対する振幅関数の様子

式(4), (5)およびオイラーの公式より, 磁場分布は

$$\begin{aligned} B_z(r, t) &= \Re \left[ \left\{ \tilde{B}_R(r) + i\tilde{B}_I(r) \right\} \cdot \left\{ \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) \right\} \right] \\ &= \tilde{B}_R(r) \cos(\omega t) - \tilde{B}_I(r) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (14)$$

と与えられる. 無次元系では, 次式のようになる.

$$\beta_z(R, \tau) = \tilde{\beta}_R(R) \cos(W_m \tau) - \tilde{\beta}_I(R) \sin(W_m \tau) \quad (15)$$

ただし, 無次元変数の定義は以下の通りである.

$$R = \frac{r}{a}, \quad \tau = \frac{t}{a^2/\nu_m}, \quad \beta_z = \frac{B_z}{B_0} \quad (16)$$

結局, 式(15)により非定常な磁場分布が求められる. 無次元時刻  $\tau = 0$  であれば, 正弦関数が 0 となるので,

$$\beta_z(R) = \tilde{\beta}_R(R)$$

図 1 の実線 (実部) の曲線に対応する. その時刻から 4 分の 1 周期後には, 余弦関数が 0 になるので,

$$\beta_z(R) = -\tilde{\beta}_I(R)$$

図 1 の 1 点鎖線 (虚部) を反転させた曲線に対応する. 図 1 の 2 曲線は磁場の瞬時の分布を表しており, 任意の時刻における磁場分布は, それらの線形結合として与えられることがわかる.

## 問題

問 1 Ampère の法則により, 電流密度を求めよ.

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_m} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_m} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ r & \partial_\theta & \partial_z \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_m} \left( \frac{\vec{e}_r}{r} \partial_\theta B_z - \vec{e}_\theta \partial_r B_z \right)$$

軸対称なので磁場の  $\theta$  方向の変化は無いから, 電流密度の  $r$  成分は無い.  $\theta$  成分について求めると,

$$\begin{aligned} \mu_m j_\theta &= -\partial_r B_z = -\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \tilde{B}_R(r) \cos(\omega t) - \tilde{B}_I(r) \sin(\omega t) \right\} \\ &= -\frac{\partial \tilde{B}_R}{\partial r} \cos(\omega t) + \frac{\partial \tilde{B}_I}{\partial r} \sin(\omega t) \\ j_\theta &= \frac{1}{\mu_m} \left\{ -\frac{d\tilde{B}_R}{dr} \cos(\omega t) + \frac{d\tilde{B}_I}{dr} \sin(\omega t) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

問2 時間平均のローレンツ力を求めよ.

$$\begin{aligned}
 \vec{f} &= \vec{j} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ 0 & j_\theta & 0 \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = j_\theta B_z \vec{e}_r \\
 &= \frac{1}{\mu_m} \left\{ -\frac{d\tilde{B}_R}{dr} \cos(\omega t) + \frac{d\tilde{B}_I}{dr} \sin(\omega t) \right\} \left\{ \tilde{B}_R \cos(\omega t) - \tilde{B}_I \sin(\omega t) \right\} \vec{e}_r \\
 f_r &= \frac{1}{\mu_m} \left\{ -\frac{d\tilde{B}_R}{dr} \tilde{B}_R \cos(\omega t) \cos(\omega t) + \frac{d\tilde{B}_R}{dr} \cos(\omega t) \tilde{B}_I \sin(\omega t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{d\tilde{B}_I}{dr} \sin(\omega t) \tilde{B}_R \cos(\omega t) - \frac{d\tilde{B}_I}{dr} \tilde{B}_I \sin(\omega t) \sin(\omega t) \right\} \\
 &= \frac{1}{\mu_m} \left\{ -\frac{d\tilde{B}_R}{dr} \tilde{B}_R \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} + \frac{d\tilde{B}_R}{dr} \tilde{B}_I \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{d\tilde{B}_I}{dr} \tilde{B}_R \frac{\sin(2\omega t)}{2} - \frac{d\tilde{B}_I}{dr} \tilde{B}_I \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

時間平均をとれば、三角関数の部分が零となるので、

$$\bar{f}_r = \frac{1}{2\mu_m} \left\{ -\frac{d\tilde{B}_R}{dr} \tilde{B}_R - \frac{d\tilde{B}_I}{dr} \tilde{B}_I \right\} = -\frac{1}{4\mu_m} \frac{d}{dr} (\tilde{B}_R^2 + \tilde{B}_I^2) \quad [\text{N/m}^3] \quad (18)$$

今、この力を  $r$  方向に積分すると、

$$\begin{aligned}
 p_m &= \int_0^a \bar{f}_r dr = -\frac{1}{4\mu_m} \int_0^a \frac{d}{dr} (\tilde{B}_R^2 + \tilde{B}_I^2) dr = -\frac{1}{4\mu_m} [\tilde{B}_R^2 + \tilde{B}_I^2]_0^a \\
 &= -\frac{1}{4\mu_m} \left[ \{\tilde{B}_R(a)\}^2 + \{\tilde{B}_I(a)\}^2 - \{\tilde{B}_R(0)\}^2 + \{\tilde{B}_I(0)\}^2 \right] \quad [\text{Pa}] \quad (19)
 \end{aligned}$$

となる。これは金属表面に作用する圧力のように考えられ、磁気圧といわれる。

問3 金属内部で発生する Joule 熱を求めよ.

$$\begin{aligned}
 \dot{q} &= \frac{\vec{j} \cdot \vec{j}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma \mu_m^2} \left( -\frac{d\tilde{B}_R}{dr} \cos(\omega t) + \frac{d\tilde{B}_I}{dr} \sin(\omega t) \right)^2 \\
 &= \frac{1}{\sigma \mu_m^2} \left( \left( \frac{d\tilde{B}_R}{dr} \right)^2 \cos^2(\omega t) - 2 \frac{d\tilde{B}_R}{dr} \frac{d\tilde{B}_I}{dr} \sin(\omega t) \cos(\omega t) + \left( \frac{d\tilde{B}_I}{dr} \right)^2 \sin^2(\omega t) \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma \mu_m^2} \left( \left( \frac{d\tilde{B}_R}{dr} \right)^2 \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} - 2 \frac{d\tilde{B}_R}{dr} \frac{d\tilde{B}_I}{dr} \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \left( \frac{d\tilde{B}_I}{dr} \right)^2 \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right)
 \end{aligned}$$

これも平均値をとると、単位体積当たりの発熱速度は、次式のようになる。

$$\bar{q} = \frac{1}{2\sigma\mu_m^2} \left\{ \left( \frac{d\tilde{B}_R}{dr} \right)^2 + \left( \frac{d\tilde{B}_I}{dr} \right)^2 \right\} \quad [\text{W/m}^3] \quad (20)$$

いずれにしても、振幅関数の実部と虚部がそれぞれ求まっていれば、式(18), (20)により電磁体積力や発熱速度の平均値を即座に得ることができる。

図2は、 $W_m = 60$ としたときの電磁力 $f_r$ とジュール熱 $q$ の分布を示す。電磁力は0.1倍に、ジュール熱は0.01倍にして表示していることに注意。

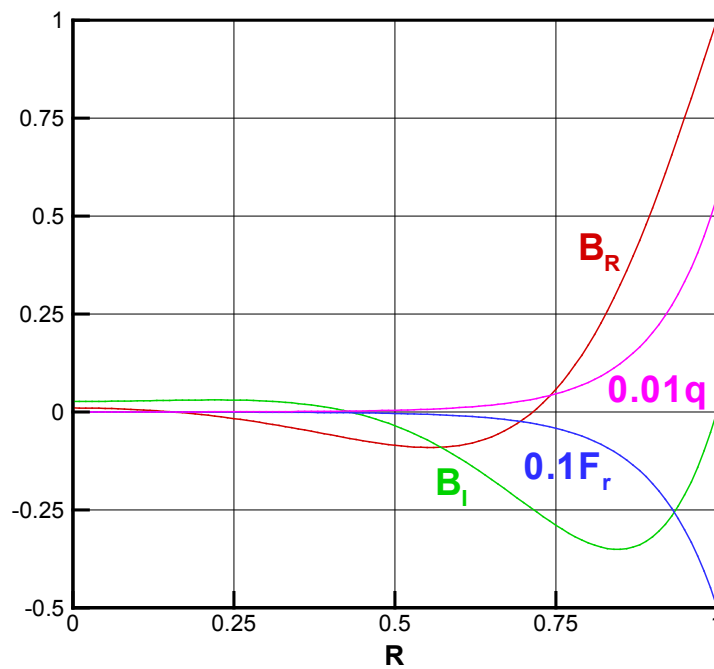


図2 振幅関数（実部  $B_R$  と虚部  $B_I$ ）、電磁力  $f_r$ 、およびジュール熱  $q$  の可視化  
( $W_m = 60$ )