磁場の拡散モデル

磁場の拡散モデルとして，y 方向に半無限に広がる金属の表面において x 方向に時間変化する磁場が印加される場合を考える．Ohm の法則と Ampère の法則から電流密度を消去し Curl をとると，基礎方程式は次の拡散方程式で与えられる．

$$\frac{\partial B_x(y,t)}{\partial t} = \nu_m \frac{\partial^2 B_x(y,t)}{\partial y^2}, \qquad (y \ge 0), \quad \left(\nu_m = \frac{1}{\sigma \mu_m}\right) \tag{1}$$

ここで，σ は電気伝導率，μ_m は透磁率を表すものとする．
境界条件は，

$$y = 0: \quad B_x(0,t) = B_0 \cos(\omega t) \tag{2}$$

$$y \to \infty: \quad B_x(\infty,t) \to 0 \tag{3}$$

ここで，B_x は求めるべき磁場の x 成分であり，ω は磁場の角振動数 [rad/s] である．これらの境界条件を満たす振動解を次のように仮定する．

$$B_x(y,t) = \Re\left[\tilde{B}_x(y) \cdot e^{\mathrm{i}\omega t}\right] \tag{4}$$

ここに，i は虚数単位であり，$\Re$ は実数部分をとることを意味する．$\tilde{B}_x$ は y を変数とする複素関数である．つまり，

$$\tilde{B}_x(y) = \tilde{B}_R(y) + \mathrm{i}\tilde{B}_I(y) \tag{5}$$

と実部と虚部から成る．式(1)における磁場を，$\tilde{B}_x(y) \cdot e^{\mathrm{i}\omega t}$ として代入すると，

$$\text{左辺：} \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\tilde{B}_x e^{\mathrm{i}\omega t}\right] = \mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}\omega t}\tilde{B}_x, \qquad \text{右辺：} \nu_m \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} = \nu_m \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\tilde{B}_x e^{\mathrm{i}\omega t}\right] = \nu_m \frac{d^2 \tilde{B}_x}{dy^2} e^{\mathrm{i}\omega t}$$

となる．したがって，式(1)は次式となる．

$$\mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}\omega t}\tilde{B}_x = \nu_m \frac{d^2 \tilde{B}_x}{dy^2} e^{\mathrm{i}\omega t}$$

この式を整理すると，次の常微分方程式を得る．

$$\frac{d^2 \tilde{B}_x}{dy^2} - \left(\frac{\mathrm{i}\omega}{\nu_m}\right)\tilde{B}_x = 0 \tag{6}$$

また境界条件は以下のように与えられる．

$$y = 0: \quad \tilde{B}_x(0) = B_0 \tag{7}$$

$$y \to \infty: \quad \tilde{B}_x(\infty) \to 0 \tag{8}$$

この方程式の一般解は，2 つの定数を用いて次のように表すことができる．

$$\tilde{B}_x(y) = C_1 e^{\lambda y} + C_2 e^{-\lambda y}, \quad \lambda = \sqrt{\mathrm{i}\omega/\nu_m} \tag{9}$$

次に，λを簡略化する．次式が成り立つので

$$\sqrt{\mathrm{i}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}) \tag{10}$$

式(9)は次式のように書き換えられる．

$$\tilde{B}_x(y) = C_1 e^{k(1+\mathrm{i})y} + C_2 e^{-k(1+\mathrm{i})y}, \quad k = \sqrt{\omega/2\nu_m} = \sqrt{\sigma\mu_m\omega/2} > 0 \tag{11}$$

ここに，kは波数で[m^{-1}]の次元を持つ．境界条件(8)より，式(11)が発散しないためには$C_1 = 0$である必要があり，また境界条件(7)より，$C_2 = B_0$となる．よって，式(11)は

$$\tilde{B}_x(y) = B_0 e^{-k(1+\mathrm{i})y} \tag{12}$$

と決まる．これを，式(4)に代入して最終的に次のようになる．

$$B_x(y,t) = \Re\left[B_0 e^{-k(1+\mathrm{i})y} e^{\mathrm{i}\omega t}\right] = \Re\left[B_0 e^{-ky} e^{\mathrm{i}(\omega t - ky)}\right] = B_0 e^{-ky}\cos(\omega t - ky) \tag{13}$$

無次元磁場は次式となる．

$$B_x/B_0 = e^{-ky}\cos(\omega t - ky) \tag{14}$$

指数関数にかかるkは減衰定数と呼ばれ，三角関数の中のkは波数と呼ばれる．今の場合，減衰定数および波数は，ともに$k = \sqrt{\dfrac{\omega}{2\nu_m}}$である。したがって，1 波長（$2\pi/k$）進む間に，振幅は$e^{-2\pi} \cong 0.002$倍に減衰することがわかる．

<u>問題</u>

<u>問１　Ampère の法則により，電流密度を求めよ．</u>

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_m}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_m}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ B_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_m}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}\vec{e}_y - \frac{\partial B_x}{\partial y}\vec{e}_z\right)$$

磁場のz方向の変化は無いから，電流密度のy成分は無い．z成分について求めると，

$$\mu_m j_z = -\frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{B_0 e^{-ky}\cos(\omega t - ky)\right\} = -B_0\left\{-ke^{-ky}\cos(\omega t - ky) + ke^{-ky}\sin(\omega t - ky)\right\}$$
$$= B_0 k e^{-ky}\left\{\cos(\omega t - ky) - \sin(\omega t - ky)\right\}$$

$$j_z = \frac{B_0}{\mu_m}ke^{-ky}\left\{\cos(\omega t - ky) - \sin(\omega t - ky)\right\} \tag{15}$$

<u>問２　時間平均のローレンツ力を求めよ．</u>

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & j_z \\ B_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = j_z B_x \vec{e}_y$$

$$= \frac{B_0}{\mu_m} k e^{-ky} \left\{ \cos(\omega t - ky) - \sin(\omega t - ky) \right\} \cdot B_0 e^{-ky} \cos(\omega t - ky) \vec{e}_y$$

$$f_y = \frac{{B_0}^2}{\mu_m} k e^{-2ky} \left\{ \cos(\omega t - ky)\cos(\omega t - ky) - \sin(\omega t - ky)\cos(\omega t - ky) \right\}$$

$$= \frac{{B_0}^2}{\mu_m} k e^{-2ky} \left[\frac{1 + \cos\left\{2(\omega t - ky)\right\}}{2} - \frac{\sin\left\{2(\omega t - ky)\right\}}{2} \right]$$

時間平均をとれば，三角関数の部分が零となるので，

$$\overline{f}_y = \frac{{B_0}^2}{2\mu_m} k e^{-2ky} = \frac{{B_0}^2}{2} \sqrt{\frac{\sigma\omega}{2\mu_m}} \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{2\omega}{\nu_m}} y \right) \qquad \left[\mathrm{N/m^3} \right] \tag{16}$$

を得る．この体積力は，金属表面から内部へ向かうことがわかるが，減衰の程度は，磁場のそれの 2 倍早くなる．つまり表皮厚さは半分となり，金属表面に法線力が集中する．今，この力を y 方向に積分すると，

$$p_m = \int_0^\infty \overline{f}_y dy = \int_0^\infty \frac{{B_0}^2}{2\mu_m} k e^{-2ky} dy = \frac{{B_0}^2}{2\mu_m} k \left[-\frac{1}{2k} e^{-2ky} \right]_0^\infty = \frac{{B_0}^2}{4\mu_m} \qquad [\mathrm{Pa}] \tag{17}$$

となるが，金属表面に作用する圧力のように考えることができるので，これを磁気圧力と呼ぶ．

問３　金属内部で発生する Joule 熱を求めよ．

$$\dot{q} = \frac{\vec{j} \cdot \vec{j}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{B_0}{\mu_m} k e^{-ky} \right)^2 \left\{ \cos(\omega t - ky) - \sin(\omega t - ky) \right\}^2$$

$$= \frac{1}{\sigma} \frac{{B_0}^2}{{\mu_m}^2} k^2 e^{-2ky} \left\{ \cos^2(\omega t - ky) - 2\cos(\omega t - ky)\sin(\omega t - ky) + \sin^2(\omega t - ky) \right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma} \frac{{B_0}^2}{{\mu_m}^2} k^2 e^{-2ky} \left\{ \frac{1 + \cos\left\{2(\omega t - ky)\right\}}{2} - \sin\left\{2(\omega t - ky)\right\} + \frac{1 - \cos\left\{2(\omega t - ky)\right\}}{2} \right\}$$

これも平均値をとると，単位体積当たりの発熱速度は，次式のようになる．

$$\overline{q} = \frac{1}{\sigma} \frac{{B_0}^2}{{\mu_m}^2} k^2 e^{-2ky} = \frac{1}{\sigma} \frac{{B_0}^2}{{\mu_m}^2} \frac{\omega\sigma\mu_m}{2} e^{-2ky} = \frac{\omega {B_0}^2}{2\mu_m} \exp\left(-2y \sqrt{\frac{\omega}{2\nu_m}} \right) \qquad \left[\mathrm{W/m^3} \right] \tag{18}$$

これを y 方向に積分すると，単位面積当たりの発熱速度は，

$$Q=\int_0^\infty \bar{q}\,dy=\int_0^\infty \frac{\omega B_0{}^2}{2\mu_m}\exp(-2ky)\,dy=\frac{\omega B_0{}^2}{2\mu_m}\left[-\frac{1}{2k}\exp(-2ky)\right]_0^\infty=\frac{\omega B_0{}^2}{4k\mu_m}$$
$$=\frac{\omega B_0{}^2}{4\mu_m}\sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_m}}=\frac{B_0{}^2}{2\mu_m}\sqrt{\frac{\omega}{2\sigma\mu_m}}\qquad\left[\mathrm{W/m^2}\right] \tag{19}$$

となる．

問４　磁場によって投入された単位時間あたりのエネルギー流束を求めよ．

電磁場のエネルギー流束を表すポインティングベクトル $\vec{S}$ [W/m^2]は，次式で定義される．

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_m}\vec{E}\times\vec{B} \tag{20}$$

電場 $\vec{E}$ と電流密度 $\vec{j}$ とは，以下の関係がある．

$$\vec{E}=\frac{1}{\sigma}\vec{j} \tag{21}$$

式(15)を代入して，

$$E_z(y,t)=\frac{B_0}{\sigma\mu_m}ke^{-ky}\{\cos(\omega t-ky)-\sin(\omega t-ky)\}$$
$$=\frac{B_0\omega}{2k}e^{-ky}\{\cos(\omega t-ky)-\sin(\omega t-ky)\},\quad \because \mathrm{eq.}(11) \tag{22}$$

式(20)に基づいて，電磁エネルギー流束の y 成分を計算すると，

$$S_y(y,t)=\frac{\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)_y}{\mu_m}=\frac{B_0\omega}{2k\mu_m}e^{-ky}\{\cos(\omega t-ky)-\sin(\omega t-ky)\}B_0e^{-ky}\cos(\omega t-ky)$$
$$=\frac{B_0{}^2\omega}{2k\mu_m}e^{-2ky}\left\{\frac{1+\cos 2(\omega t-ky)}{2}-\frac{\sin 2(\omega t-ky)}{2}\right\} \tag{23}$$

この平均値は，

$$S_y(y)=\frac{B_0{}^2\omega}{4k\mu_m}e^{-2ky} \tag{24}$$

表面における電磁エネルギー流束は，

$$S_y\big|_{y=0}=\frac{B_0{}^2\omega}{4k\mu_m}=\frac{B_0{}^2}{2\mu_m}\sqrt{\frac{\omega}{2\sigma\mu_m}}\qquad\left[\mathrm{W/m^2}\right] \tag{25}$$

となり，この結果は式(19)に一致する．つまり，投入される電磁エネルギーは，熱エネルギー（Joule 熱）として散逸される．