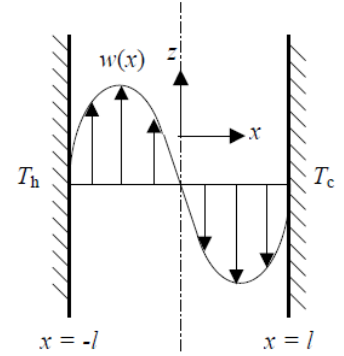


## 鉛直平行平板間の自然対流の線形安定性

### 支配方程式

右図のように、ある鉛直面が一定温度で加熱され、それに対向する平行な鉛直面が一定温度で冷却される二次元の自然対流の線形安定性について考える。流体は非圧縮性のニュートン流体で Boussinesq 近似が成り立ち、粘性散逸は無視されるものとする。支配方程式は、連続の式、運動方程式、およびエネルギー方程式で以下の通りとする。



$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + g\beta(T - T_0)\delta_{i3} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3)$$

本稿では、2次元のデカルト座標系で考える。座標軸は、水平方向に  $x$ 、鉛直方向に  $z$  とする。またそれらの方向の速度成分を、それぞれ  $u$ 、 $w$  とする。鉛直平板間の距離を  $2l$  とすれば、境界条件は、以下のように与えられる。

$$\begin{cases} x = -l: & u = w = 0, \quad T = T_h \\ x = l: & u = w = 0, \quad T = T_c \end{cases} \quad (4)$$

一般には  $T_0$  は基準温度であるが、ここでは加熱面温度と冷却面温度の平均値とする。

### 数値解析

#### 基本状態

ここでは、加熱・冷却平板が鉛直方向に無限に長い場合を想定する。容器の上端および下端近傍を除いては、流れは平行流とみなされ、温度分布は熱伝導状態となる。このとき、運動方程式やエネルギー方程式の左辺はそれぞれ零となり、Grashof 数や Prandtl 数とは無関係に流れ場と温度場が決まる。そのような基本状態を得る為には、ある高さの断面において、以下に示す運動方程式およびエネルギー方程式を数値的に解くことに帰着される。なお、基本状態の変数には  $\bar{\quad}$  をつけて表すものとする。Boussinesq 近似を用いた解析においては、流れ場の対称性により平板間の平均流量はゼロとなる。したがって、 $z$  方向成分の運動方程式では、圧力項がなくなり、粘性項と浮力項のつりあい式となる。

$$\frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + \frac{g\beta(\bar{T} - T_0)}{\nu} = 0 \quad (5)$$

エネルギー方程式は、次のラプラス方程式となる。

$$\frac{d^2\bar{T}}{dx^2} = 0 \quad (6)$$

境界条件(4)および式(5), (6)を満たす温度分布と速度分布は, 以下のように表される. つまり, 基本状態の温度分布は一次関数, 速度分布は三次関数となることが容易にわかる.

$$\bar{T}(x) = -\frac{T_h - T_c}{2l}x + \frac{T_h + T_c}{2} = -(\Delta T)\frac{x}{l} + T_0, \quad \left( \Delta T \equiv \frac{T_h - T_c}{2}, \quad T_0 \equiv \frac{T_h + T_c}{2} \right) \quad (7)$$

$$\bar{w}(x) = \frac{g\beta(\Delta T)l^2}{6\nu} \left\{ \left( \frac{x}{l} \right)^3 - \left( \frac{x}{l} \right) \right\} = \frac{g\beta(\Delta T)l^2}{6\nu} \left( \frac{x}{l} \right) \left( \frac{x}{l} + 1 \right) \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \quad (8)$$

### 攪乱方程式

基本状態の線形安定性を調べる. ここでは, 速度, 温度, 圧力といった従属変数は, 基本状態と鉛直方向に波数  $a$  の周期性を持つ微小攪乱の和として, 次式で与えられるものと仮定する. ただし,  $i$  は虚数単位とする.

$$\begin{pmatrix} u(x, z, t) \\ w(x, z, t) \\ T(x, z, t) \\ p(x, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}(x) \\ \bar{w}(x) \\ \bar{T}(x) \\ \bar{p}(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u'(x, z, t) \\ w'(x, z, t) \\ T'(x, z, t) \\ p'(x, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{w}(x) \\ \bar{T}(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{u}(x) \\ \tilde{w}(x) \\ \tilde{T}(x) \\ \tilde{p}(x) \end{pmatrix} \exp(iaz + st) + \text{c.c.} \quad (9)$$

ここで,  $\text{c.c.}$  は前項に対する複素共役を表す.  $s = s_r + is_i$  は複素角振動数を表し,  $s_r > 0$  であれば不安定であり,  $s_r < 0$  であれば安定である. 微小攪乱どうしの積を無視して線形化すれば, 攪乱方程式は以下のように書ける.

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{w} \frac{\partial u'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right) \quad (11)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + u' \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) + g\beta T' \quad (12)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u' \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial T'}{\partial z} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right) \quad (13)$$

さらに式(9)を代入し, これらを振幅関数で表せば,

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} + ia\tilde{w} = 0 \quad (14)$$

$$s\tilde{u} + i\bar{w}a\tilde{u} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\tilde{p}}{dx} + \nu \left( \frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - a^2\tilde{u} \right) \quad (15)$$

$$s\tilde{w} + \tilde{u} \frac{d\bar{w}}{dx} + i\bar{w}a\tilde{w} = -\frac{1}{\rho_0} ia\tilde{p} + \nu \left( \frac{d^2\tilde{w}}{dx^2} - a^2\tilde{w} \right) + g\beta\tilde{T} \quad (16)$$

$$s\tilde{T} + \tilde{u} \frac{d\bar{T}}{dx} + i\bar{w}a\tilde{T} = \alpha \left( \frac{d^2\tilde{T}}{dx^2} - a^2\tilde{T} \right) \quad (17)$$

最終的に、無次元の振幅関数に対する連立常微分方程式は、以下のように表される。

$$D\tilde{U} + ik\tilde{W} = 0 \quad (18)$$

$$S\tilde{U} + i\bar{W}k\tilde{U} = -D\tilde{P} + \frac{1}{Gr}(D^2 - k^2)\tilde{U} \quad (19)$$

$$S\tilde{W} + \tilde{U} \cdot D\bar{W} + i\bar{W}k\tilde{W} = -ik\tilde{P} + \frac{1}{Gr}(D^2 - k^2)\tilde{W} + \frac{1}{Gr}\tilde{\Theta} \quad (20)$$

$$Pr(S\tilde{\Theta} + i\bar{W}k\tilde{\Theta} - \tilde{U}) = \frac{1}{Gr}(D^2 - k^2)\tilde{\Theta} \quad (21)$$

$$\bar{W} = \frac{1}{6}X(X+1)(X-1) \quad (22)$$

境界条件は、各振幅関数に対して、以下のように与えられる。

$$X = \pm 1: \tilde{U} = \tilde{W} = \tilde{\Theta} = 0 \quad (23)$$

無次元変数と無次元数は以下のように定義される。

$$D = \frac{d}{dX}, \quad X = \frac{x}{l}, \quad \bar{W} = \frac{\bar{w}}{Gr \cdot \nu / l}, \quad (\tilde{U}, \tilde{W}) = \frac{(\tilde{u}, \tilde{w})}{Gr \cdot \nu / l}, \quad \tilde{P} = \frac{\tilde{p}}{Gr^2 \rho_0 \nu^2 / l^2},$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}(T_h - T_c), \quad T_0 = \frac{1}{2}(T_h + T_c), \quad \Theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}, \quad \tilde{\Theta} = \frac{\tilde{T}}{\Delta T}, \quad (24)$$

$$Gr = \frac{g\beta(\Delta T)l^3}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad k = al, \quad S = \frac{s}{Gr \cdot \nu / l^2}$$

### 解析手法

式(18)-(21)を実部と虚部に分け、四次精度中心差分法により空間一次元の反復計算を行う。その際、連続の式を満たすように、HSMAC法により速度場を修正しながら圧力場を求める。なお、各変数のオーバーフローやアンダーフローを防ぐために、規格化を行っている。つまり、各変数の値を例えば2倍したのも式(18)-(21)を満たすことができるので、解を一意に定めるために、或る格子点における或る変数の値を1と固定する。計算条件は、Prandtl数 ( $Pr$ )、Grashof数 ( $Gr$ )、流れ方向の波数  $k$  であり、それらを与えた結果として、固有値として  $S$  が得られると同時に、不安定モードの固有関数（各速度成分、圧力、温度）が得られる。固有値  $S_r$  と  $S_i$  を求めるために、ここではニュートン法を適用する。式(19), (20), (21)のいずれかに適用すれば求められる。以下は、式(19)の場合であり、 $S$  のみの関数とみなす。

$$f(S) = -S\tilde{U} - i\bar{W}k\tilde{U} - D\tilde{P} + \frac{1}{Gr}(D^2 - k^2)\tilde{U} = 0 \quad (25)$$

$$S^{n+1} = S^n - C_1 \left( \frac{f(S)}{\partial f(S)/\partial S} \right)^n \quad (26)$$

ここで、 $n$  は反復のステップ数を表し、 $C_1$  はニュートン法の収束速度を調整するための定数である。反復計算中において、式(26)を任意に選んだ格子点において課すことにより、 $S$  の実部である増幅率  $Sr$  と虚部である角振動数  $Si$  が同時に得られる。基本的に重要なことはこれだけである。

このようにして得られる固有値の実部  $Sr$  はゼロではない（また虚部  $Si$  もまたゼロになるとは限らない）。中立安定曲線を描く目的であれば、 $Sr$  がゼロとなるような  $Pr$ ,  $Gr$ ,  $k$ ,  $Si$  の組み合わせを求めたい。そこでまず  $Pr$ ,  $k$  を固定して、いったん得られた解から  $Gr$  を少しずつ下ろして、 $Sr$  がゼロになるように反復修正すればよい。その際、 $Si$  も多少修正されることになる。その反復修正にもニュートン法を適用することができる。例えば、増幅率  $Sr$  を用いて、以下のように与えられる。

$$Gr^{n+1} = Gr^n - C_2 Sr^n \quad (27)$$

ここで、 $C_2$  はニュートン法の収束速度を調整するための正の定数である。増幅率  $Sr$  が正のときは、 $Gr$  を下げることを意味する。これは図1のような中立安定曲線における下分枝を求める際に有効である。式(26)からわかるように、 $Sr$  がゼロに近づくとき  $Gr$  の値はほぼ変化しなくなり収束する。それが得られる中立安定の  $Gr$  となる。一方で上分枝を求めるためには、定数の前に掛かる符号を反転させれば良い。なお、上分枝と下分枝をつなぐ領域においては、曲線の  $k$  に対する勾配が大きいので、精度を確保するためにも  $Gr$  を固定して中立安定状態の  $k$  を求めるほうが効率的である。

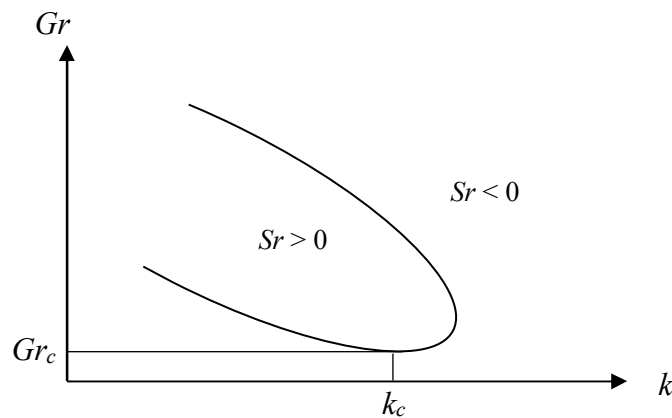
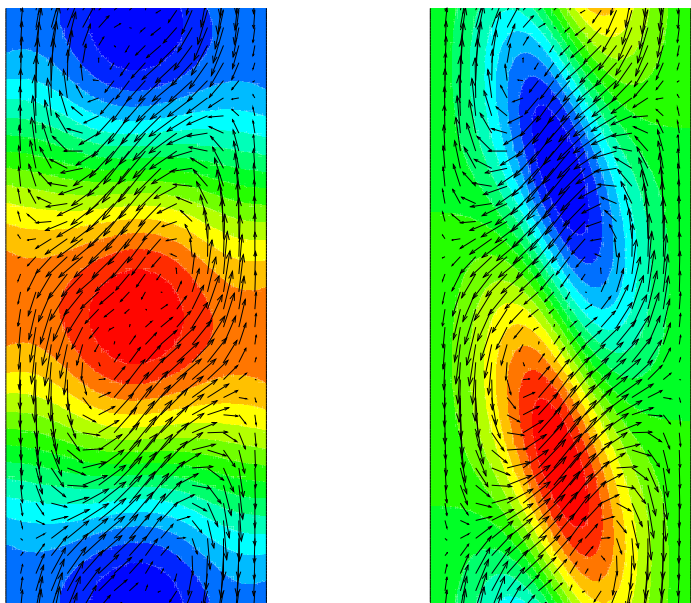


図1 中立安定曲線 ( $Sr = 0$ )

## 解析結果

まず、定在波攪乱の場合の結果を示す。格子数 201 点の差分計算を行い、 $Pr = 0.7$  とした場合、得られた臨界波数と臨界 Grashof 数は、 $k_c = 1.405$ ,  $Gr_c = 502.59$  であった。図2には、同条件における速度、圧力、温度それぞれの変動成分の可視化を示す。鉛直方向には周期性を仮定しているので、ここでは約1周期分のみを示す。対流セル（渦）は、ベナール対流のときのように隣り合う渦どうしでは回転の向きが異なる。しかしながら、対流セルは長方形ではなく、むしろ平行四辺形に近い形状をしている。時計回りの渦は基本流れを強める効果があるので圧力が下がり、それに対して反時

計回りの渦は、基本流れを弱めるので圧力が上がる。左側の加熱面から離脱する流れ部分で温度が高く、右側の冷却面から離脱する流れ部分で温度が低いことが見て取れる。

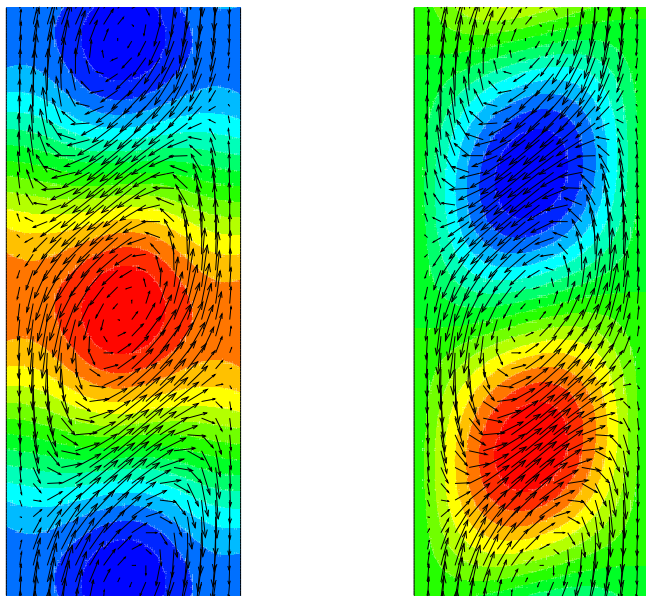


(a) 圧力と速度ベクトル

(b) 温度と速度ベクトル

図2 対流の発生臨界時における変動量の可視化 ( $Pr = 0.7, k_c = 1.405, Gr_c = 502.59$ )

図3には、 $Pr = 0.01$ での結果を示す。Prandtl数を変えても、臨界Grashof数の値は大きくは変わらず、約500程度である。図4にその様子を示す。



(a) 圧力と速度ベクトル

(b) 温度と速度ベクトル

図3 対流の発生臨界時における変動量の可視化 ( $Pr = 0.01, k_c = 1.347, Gr_c = 487.97$ )

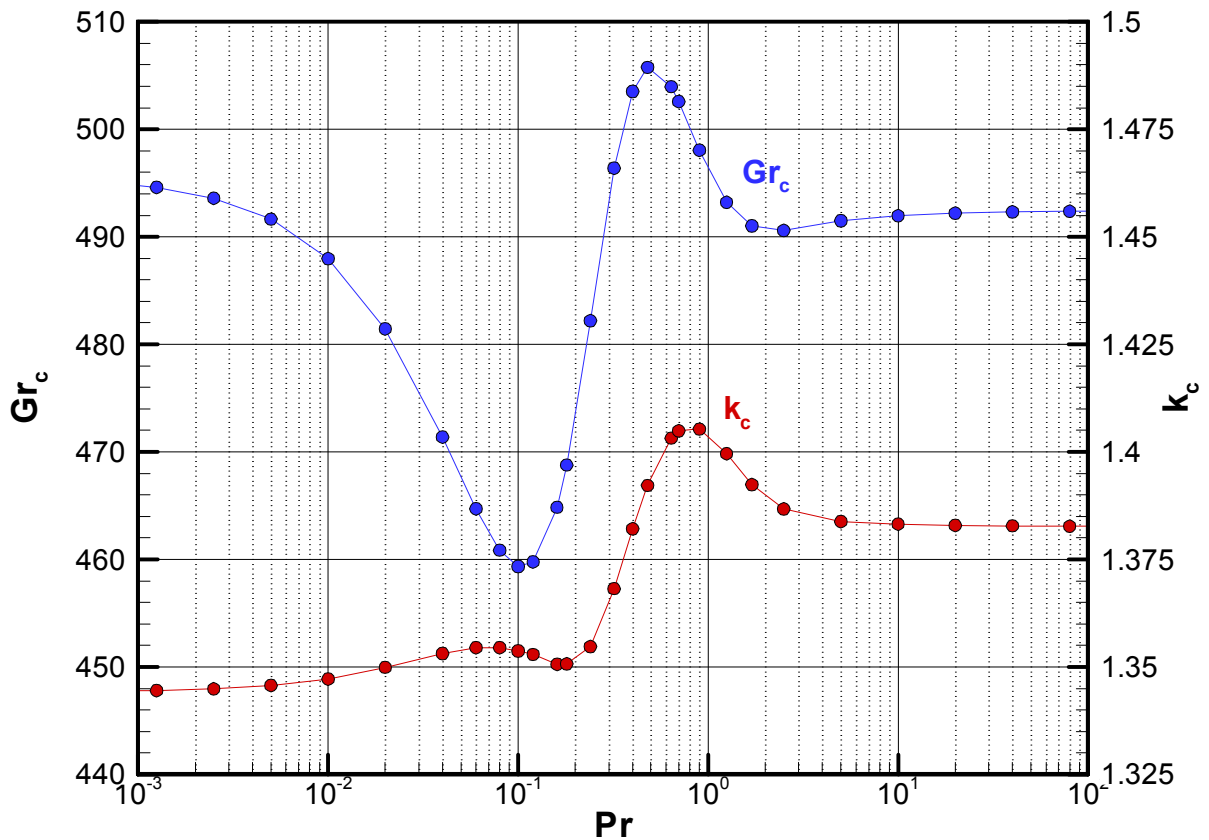


図4 様々な Prandtl 数に対する臨界 Grashof 数と臨界波数

次に伝播波攪乱の場合を示す. 格子数は 101 点とした. 図 5 は  $Pr = 15, Gr = 400$  に対して, 無次元の線形増幅率  $Sr$  と角振動数  $Si$  の波数に対する依存性を示す. 角振動数はほぼ直線的に増加するので, 波の位相速度は波数にほとんど依らないことがわかる.

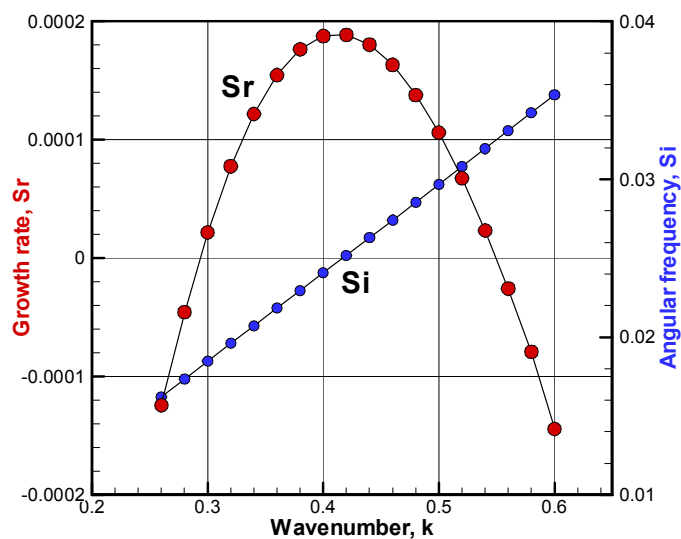


図5 増幅率と角振動数の波数に対する影響 ( $Pr = 15, Gr = 400$ )

図6は、伝播波モードの可視化の様子である。右冷却壁近傍の温度の濃淡（高い部分と低い部分）が下方へ一定の位相速度で移動していく。

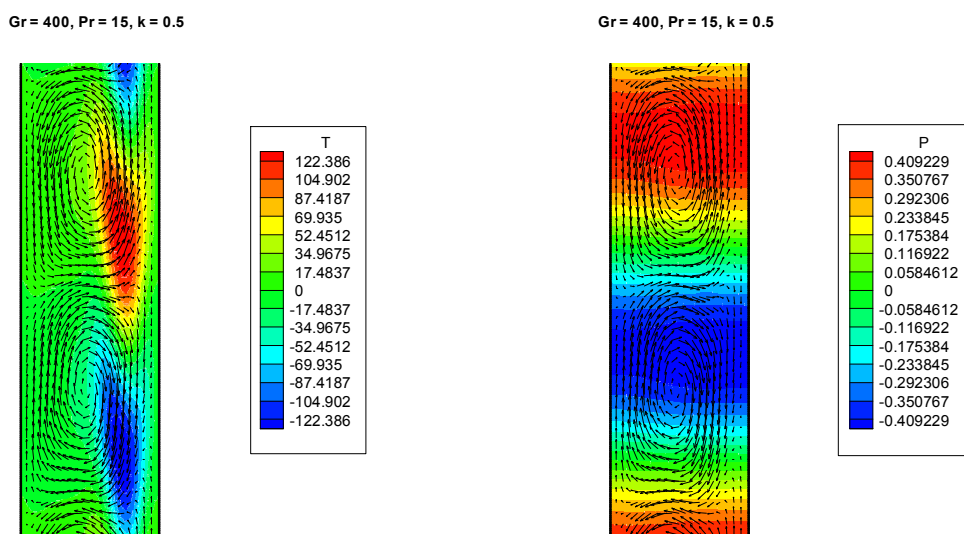


図6 温度分布（左）、圧力分布（右）および速度ベクトル（縦方向に2倍に圧縮して可視化）  
 $(Pr = 15, Gr = 400, k = 0.5, Si = 0.0297, Sr = 1.06 \times 10^{-4})$

最後に、図7には中立安定曲線 ( $Pr = 15$ ) を示す。本計算の手法と格子点数 (101 点) によると、臨界 Grashof 数はおおよそ 243.6 で、臨界波数は 0.608 であった。この臨界 Grashof 数は定在波モードのそれより低いことがわかる。

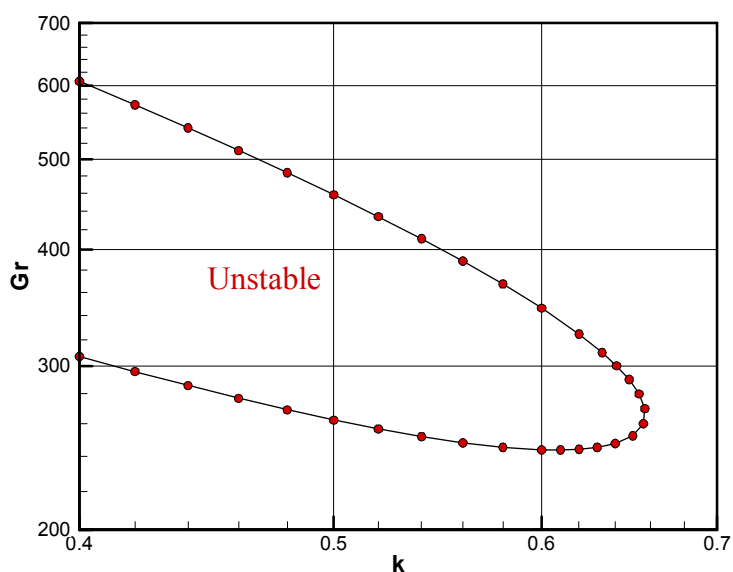


図7 中立安定曲線 ( $Pr = 15$ )