電荷保存則を満たす電流密度の求め方について

自由表面を有する電磁流体力学の数値計算において，電荷保存則を満たす電流密度を Ohm の法則により求める場合がある．これは誘導磁場の影響が無視できるような場合に見られる．ここでは HSMAC 法の考え方にならい, $\mathrm{div}\boldsymbol{j}=0$ を満たすように反復計算させることを考える. 用いる式は以下の２つである.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0 \tag{1}$$

$$\vec{j}=\sigma\left(-\vec{\nabla}\phi+\vec{u}\times\vec{B}\right) \tag{2}$$

ここで，σ は導電率を表し，液相ではある一定値をとり，気相ではゼロとなる場合も想定する．まず，式(2)を 2 段階に分離する．上付き p は予測値であり，c は修正値（真の値）とする．

$$\begin{cases}\vec{j}^{\,p}=\sigma\left(-\vec{\nabla}\phi^{p}+\vec{S}\right)\\ \vec{j}^{\,c}=\vec{j}^{\,p}-\sigma\vec{\nabla}\left(\phi^{c}-\phi^{p}\right)=\vec{j}^{\,p}-\sigma\vec{\nabla}\left(\delta\phi\right)\end{cases} \tag{3a,b}$$

ここに，$\vec{S}$ は $\vec{u}\times\vec{B}$ のことで既知とし，その成分を $\left(S_X,S_Y,S_Z\right)$ とする．式(1)については,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}^{\,c}=0 \tag{4}$$

としておく．2 次元場で考える.
式(3a)より，予測値は次式のように得られる.

$$j^{p}_{X\,i+,j}=\sigma_{i+,j}\left(-\frac{\phi^{p}_{i+1,j}-\phi^{p}_{i,j}}{\Delta x}+S_{X\,i+,j}\right),\quad j^{p}_{Y\,i,j+}=\sigma_{i,j+}\left(-\frac{\phi^{p}_{i,j+1}-\phi^{p}_{i,j}}{\Delta y}+S_{Y\,i,j+}\right). \tag{5}$$

一方，式(3b)の発散をとり,

$$\vec{\nabla}\cdot\left\{\sigma\vec{\nabla}\left(\delta\phi\right)\right\}=\vec{\nabla}\cdot\vec{j}^{\,p} \tag{6}$$

これを成分表示して,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\sigma\frac{\partial\left(\delta\phi\right)}{\partial x}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\sigma\frac{\partial\left(\delta\phi\right)}{\partial y}\right\}=\frac{\partial j^{p}_{X}}{\partial x}+\frac{\partial j^{p}_{Y}}{\partial y} \tag{7}$$

さらに，差分式で書けば

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(\Delta x)}\left\{\sigma_{i+,j}\frac{(\delta\phi)_{i+1,j}-(\delta\phi)_{i,j}}{(\Delta x)}-\sigma_{i-,j,k}\frac{(\delta\phi)_{i,j}-(\delta\phi)_{i-1,j}}{(\Delta x)}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{(\Delta y)}\left\{\sigma_{i,j+}\frac{(\delta\phi)_{i,j+1}-(\delta\phi)_{i,j}}{(\Delta y)}-\sigma_{i,j-}\frac{(\delta\phi)_{i,j}-(\delta\phi)_{i,j-1}}{(\Delta y)}\right\}\\
&\quad=\frac{j^p_{X\,i+,j,k}-j^p_{X\,i-,j,k}}{\Delta x}+\frac{j^p_{Y\,i,j+,k}-j^p_{Y\,i,j-,k}}{\Delta y}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

式(8)は，SMAC 法において現れる電位の修正量に対する Poisson 方程式であり，連立方程式になっている．これを何らかの方法を用いて解き，電位の修正量が得られれば，式(3b)より発散ゼロの電流密度が得られる．一方で，HSMAC 法においては，式(8)において非対角成分を無視し，電位の修正量を直接的に得ることができる．ただし，以下で詳述するように反復計算を要する．

$$
(\delta\phi)_{i,j}=-\frac{\dfrac{j^p_{X\,i+,j}-j^p_{X\,i-,j}}{\Delta x}+\dfrac{j^p_{Y\,i,j+}-j^p_{Y\,i,j-}}{\Delta y}}{\dfrac{\sigma_{i+,j}+\sigma_{i-,j}}{(\Delta x)^2}+\dfrac{\sigma_{i,j+}+\sigma_{i,j-}}{(\Delta y)^2}}=\phi^c_{i,j}-\phi^p_{i,j}
\tag{9}
$$

これを少し書き換えることにより，電位の修正値は，次式から得られる．

$$
\phi^c_{i,j}=\phi^p_{i,j}+(\delta\phi)_{i,j}=\phi^p_{i,j}-\frac{\dfrac{j^p_{X\,i+,j}-j^p_{X\,i-,j}}{\Delta x}+\dfrac{j^p_{Y\,i,j+}-j^p_{Y\,i,j-}}{\Delta y}}{\dfrac{\sigma_{i+,j}+\sigma_{i-,j}}{(\Delta x)^2}+\dfrac{\sigma_{i,j+}+\sigma_{i,j-}}{(\Delta y)^2}}
\tag{10}
$$

式(10)を反復して用いるとき，それが収束していくためには，修正量がゼロに近づかなくてはならない．したがって，電流密度の発散（修正項の分子）がゼロに近づいていく必要があり，電流密度そのものも修正する必要がある．電流密度の修正式は，式(3b)の式から

$$
\begin{aligned}
&j^{\,c}_{X\,i+,j}=j^{\,p}_{X\,i+,j}+\sigma_{i+,j}\frac{(\delta\phi)_{i,j}}{\Delta x},\quad j^{\,c}_{X\,i-,j}=j^{\,p}_{X\,i-,j}-\sigma_{i-,j}\frac{(\delta\phi)_{i,j}}{\Delta x},\\
&j^{\,c}_{Y\,i,j+}=j^{\,p}_{Y\,i,j+}+\sigma_{i,j+}\frac{(\delta\phi)_{i,j}}{\Delta y},\quad j^{\,c}_{Y\,i,j-}=j^{\,p}_{Y\,i,j-}-\sigma_{i,j-}\frac{(\delta\phi)_{i,j}}{\Delta y}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

となる．

まとめると，次に示す式(12)より電流密度の予測値（$m=1$ に対応）を求め，式(13)と(14)により電位と電流密度を同時修正し，それらの値が収束するまで反復する．ただし，上付き添え字 m を反復回数とする．

$$
\begin{aligned}
&j^1_{X\,i+,j}=\sigma_{i+,j}\left(-\frac{\phi^1_{i+1,j}-\phi^1_{i,j}}{\Delta x}+S_{X\,i+,j}\right),\quad j^1_{X\,i-,j}=\sigma_{i-,j}\left(-\frac{\phi^1_{i,j}-\phi^1_{i-1,j}}{\Delta x}+S_{X\,i-,j}\right),\\
&j^1_{Y\,i,j+}=\sigma_{i,j+}\left(-\frac{\phi^1_{i,j+1}-\phi^1_{i,j}}{\Delta y}+S_{Y\,i,j+}\right),\quad j^1_{Y\,i,j-}=\sigma_{i,j-}\left(-\frac{\phi^1_{i,j}-\phi^1_{i,j-1}}{\Delta y}+S_{Y\,i,j-}\right).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\phi_{i,j}^{m+1} = \phi_{i,j}^{m} + \left(\delta\phi\right)_{i,j}^{m} = \phi_{i,j}^{m} - \frac{\dfrac{j_{X\,i+,j}^{m} - j_{X\,i-,j}^{m}}{\Delta x} + \dfrac{j_{Y\,i,j+}^{m} - j_{Y\,i,j-}^{m}}{\Delta y}}{\dfrac{\sigma_{i+,j} + \sigma_{i-,j}}{\left(\Delta x\right)^2} + \dfrac{\sigma_{i,j+} + \sigma_{i,j-}}{\left(\Delta y\right)^2} + \varepsilon} \tag{13}
$$

$$
j_{X\,i\pm,j}^{\ m+1} = j_{X\,i\pm,j}^{\ m} \pm \sigma_{i\pm,j} \frac{\left(\delta\phi\right)_{i,j}^{m}}{\Delta x}, \quad j_{Y\,i,j\pm}^{\ m+1} = j_{Y\,i,j\pm}^{\ m} \pm \sigma_{i,j\pm} \frac{\left(\delta\phi\right)_{i,j}^{m}}{\Delta y}. \text{（複合同順）} \tag{14}
$$

HSMAC 法の利点は電荷保存則を満たす電流密度ベクトルと電位が同時に得られる点である．

気相の導電率がゼロの場合でもこの手法で数値的に計算可能であるかどうか検証する．式(13)において，ゼロ割りが起きる．したがって，式(13)を機能させるには，修正電位項の分母に微小な値εを含ませておけば良いだろう．実際，式(13)は Newton-Raphson 法を示すものであり，分子がゼロに近づいていくことが重要であり，分母はただの係数とみなせるからである．また，式(14)に示される電流密度の修正式は機能しないが，もとより気相での電流密度はゼロであるため，その修正の必要はない．

式(12), (13), (14)には，セル界面における導電率の値が含まれる．導電率のようなスカラ量は，通常はセル中心で定義されるので，補間が必要となる．図 1 は一次元の場合に，界面が格子間の任意の位置にある場合を示す． $j_x = -\sigma\left(\partial\phi/\partial x\right)$は，次式のように離散化される．

$$
j_x\big|_{\text{int}} = -\frac{\sigma_1\sigma_2}{\Delta x_1\sigma_1 + \Delta x_2\sigma_2}\left(\phi_2 - \phi_1\right), \quad \left(\text{where} \quad \Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x\right) \tag{15}
$$

つまり合成導電率が，

$$
\sigma_{\text{int}} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\dfrac{\Delta x_1}{\Delta x}\sigma_1 + \dfrac{\Delta x_2}{\Delta x}\sigma_2} \tag{16}
$$

と表されることを意味する．特に，界面がちょうど格子間の中点に位置するとき，合成導電率は，

$$
\sigma_{\text{int}} = \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \tag{17}
$$

と簡単化される．電気回路の抵抗の直列つなぎを考えれば，すぐわかることだが，導電率の補間値の計算に，単純な線形補間をしてはいけないことを示唆している．
式(15)はそのまま多次元の場合への適用が難しい．また，界面をある一定の幅を持たせるような手法を採用することも多いので，界面における導電率の補間値（合成導電率）を，界面の隣接両側のセル中心における導電率値をそれぞれσ_-， σ_+とするとき，次式のように与えれば計算が容易になる．

$$
\sigma_{\text{int}} = \frac{2\sigma_-\left(\varphi\right)\sigma_+\left(\varphi\right)}{\sigma_-\left(\varphi\right) + \sigma_+\left(\varphi\right)} \tag{18}
$$

ここで， φはカラー関数やレベルセット関数などを表し，その関数に依存してセル中心における導電率が定義される．式(18)のように与えることにより，セル界面の両側のどちらかが導電率ゼロであれば，界

面の導電率がゼロになるので，非導電性流体に電流が流れ込むことを抑制できると考えられる．具体的には，一例を示すと以下のようになる．

$$\sigma_{i+,j} = \frac{2\sigma\left(\varphi_{i,j}\right)\sigma\left(\varphi_{i+1,j}\right)}{\sigma\left(\varphi_{i,j}\right)+\sigma\left(\varphi_{i+1,j}\right)} \tag{19}$$

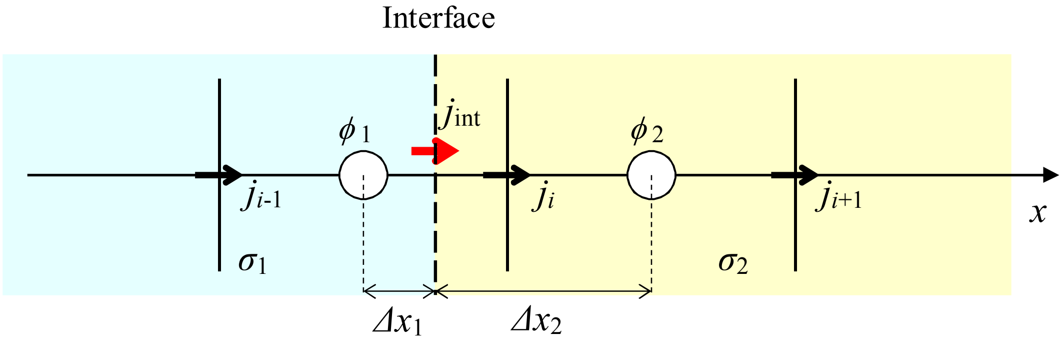

図１　格子と界面位置（ j_x は j と表記している ）