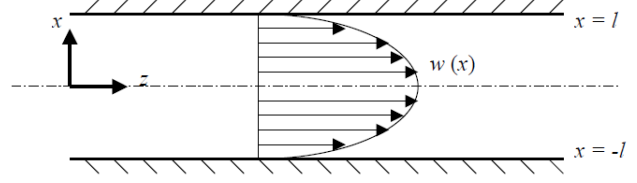


平面 Poiseuille 流れの線形安定性について

支配方程式

右図のような平行平板間を一定の圧力勾配の下で駆動される平面 Poiseuille 流れの線形安定性について考える。流体は非圧縮性のニュートン流体と仮定し、粘性散逸は無視されるものとする。支配方程式は、連続の式および運動方程式であり、以下の通りとする。重力は x 方向逆向きに作用するものとする。



$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - g \delta_{i1} \quad (2)$$

本稿では、2次元のデカルト座標系で考える。座標軸は、主流方向に z 、主流に直交する方向に x とする。またそれらの方向の速度成分を、それぞれ w, u とする。平板間の距離を $2l$ とすれば、速度の境界条件は、以下のように与えられる。

$$x = \pm l: u = w = 0 \quad (3)$$

数値解析

基本状態

ここでは、対向する平行平板は主流方向に無限に長い場合を想定する。基本流は平行流とみなされる。このとき、運動方程式の左辺の慣性項は落ちて、Reynolds 数とは無関係に流れ場が決まる。そのような基本状態を得る為には、ある断面において、以下に示す運動方程式を理論的または数値的に解くことに帰着される。なお、基本状態の変数には $\bar{\quad}$ をつけて表すものとする。

まず、密度 ρ は一定と仮定しているので、 x 方向成分の運動方程式における重力項は、圧力項として一纏めにすることができて、下記に示されるように、基本状態の圧力 \bar{p}^* は z のみの関数として扱うことができる。密度一定の流体では、重力は流れに影響を及ぼさないことがわかる。

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{(\bar{p} + \rho g x)}_{\bar{p}^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} \Rightarrow \bar{p}^* = \bar{p}^*(z) \quad (4)$$

次に、 z 方向成分の運動方程式では、圧力項と粘性項のつりあい式となる。

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \Rightarrow 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}^*(z)}{dz} + \nu \frac{d^2 \bar{w}(x)}{dx^2}$$

左辺に x のみの関数を、右辺に z のみの関数を置けば、それが等式として成り立つためには、両者はそれぞれ定数でなければならない。

$$\underbrace{\frac{d^2 \bar{w}(x)}{dx^2}}_{\text{function of } x} = \frac{1}{\rho \nu} \underbrace{\frac{d\bar{p}^*(z)}{dz}}_{\text{function of } z} = -\frac{G}{\nu}, \quad \left(\because G \equiv -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}^*(z)}{dz} = \text{const.} \right) \quad (5)$$

ここで、 G は重力加速度と同じ次元を持つ一定の圧力勾配とし、これが与えられることにより、流体が駆動される。式(5)および境界条件(3)を満たす速度分布は、以下のように表される。つまり、速度分布は二次関数となる。

$$\bar{w}(x) = \frac{Gl^2}{2\nu} \left(1 + \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) = \bar{w}_{max} \left\{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right\} \quad (6)$$

なお、圧力分布は、ある基準点の圧力を p_0 とするとき、式(4)および(5)より、

$$\bar{p}(x, z) = p_0 - \rho(Gz + gx) \quad (7)$$

となる。

攪乱方程式

基本状態の線形安定性を調べる。ここでは、速度、圧力といった従属変数は、基本状態と主流方向に波数 a の周期性を持つ微小攪乱の和として、次式で与えられるものと仮定する。ただし、 i は虚数単位とする。

$$\begin{pmatrix} u(x, z, t) \\ w(x, z, t) \\ p^*(x, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}(x) \\ \bar{w}(x) \\ \bar{p}^*(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u'(x, z, t) \\ w'(x, z, t) \\ p'(x, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{w}(x) \\ \bar{p}^*(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{u}(x) \\ \tilde{w}(x) \\ \tilde{p}(x) \end{pmatrix} \exp(iaz + st) + \text{c.c.} \quad (8)$$

ここで、 c.c. は前項に対する複素共役を表す。 $s = s_r + is_i$ は複素数であり、 $s_r > 0$ であればある特定の攪乱が増幅し不安定となり、 $s_r < 0$ であれば全ての攪乱は減衰し安定である。また、 s_i は角振動数を表す。基本状態を差し引いた線形化された攪乱方程式に式(8)を代入し、これらを複素振幅関数で表せば、以下のように書ける。

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} + ia\tilde{w} = 0 \quad (9)$$

$$s\tilde{u} + i\bar{w}a\tilde{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{p}}{dx} + \nu \left(\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - a^2\tilde{u} \right) \quad (10)$$

$$s\tilde{w} + \tilde{u} \frac{d\bar{w}}{dx} + i\bar{w}a\tilde{w} = -\frac{1}{\rho} ia\tilde{p} + \nu \left(\frac{d^2\tilde{w}}{dx^2} - a^2\tilde{w} \right) \quad (11)$$

無次元化の結果として、複素振幅関数に対する連立常微分方程式は、以下のように表される。

$$D\tilde{U} + ik\tilde{W} = 0 \quad (12)$$

$$S\tilde{U} + i\bar{W}k\tilde{U} = -D\tilde{P} + \frac{1}{Re} (D^2 - k^2) \tilde{U} \quad (13)$$

$$S\tilde{W} + \tilde{U} \cdot D\bar{W} + i\bar{W}k\tilde{W} = -ik\tilde{P} + \frac{1}{Re} (D^2 - k^2) \tilde{W} \quad (14)$$

$$\bar{W} = 1 - X^2, \quad (\text{or } D^2\bar{W} = -2) \quad (15)$$

境界条件は、以下のように与えられる。

$$X = \pm 1: \tilde{U} = \tilde{W} = 0 \quad (16)$$

ただし、無次元変数と無次元数は以下のように定義される。レイノルズ数の定義に含まれる代表速度には基本流の最大値をとる。

$$D = \frac{d}{dX}, \quad X = \frac{x}{l}, \quad \bar{W} = \frac{\bar{w}}{u_{ref}}, \quad (\tilde{U}, \tilde{W}) = \frac{(\tilde{u}, \tilde{w})}{u_{ref}}, \quad \tilde{P} = \frac{\tilde{p}}{\rho u_{ref}^2}, \quad (17)$$

$$Re = \frac{u_{ref} l}{\nu}, \quad k = al, \quad S = \frac{s}{u_{ref}/l}, \quad u_{ref} = \bar{w}_{max} = \frac{Gl^2}{2\nu} = -\frac{(d\bar{p}^*/dz)l^2}{2\rho\nu}$$

解析手法

式(12), (13), (14)から Orr-Sommerfeld 方程式を導出できるが、ここではこれらの方程式をそのまま実部と虚部に分け、四次精度の中心差分法により離散化し反復計算を行う。その際、HSMAC 法を用いて連続の式を満たすように圧力場を求める。なお、各変数のオーバーフローやアンダーフローを防ぐために、任意に選んだ格子点の値を常に固定するような操作（規格化）を行う必要がある。レイノルズ数 Re および無次元波数 k を与えて、反復計算を行えば、最も不安定なモードの固有関数（各速度成分と圧力）および複素固有値 $S (= S_R + iS_I)$ を得ることができる。ここでは、固有値である増幅率 S_R と角振動数 S_I を求めるために、式(13)に対して、ニュートン法を適用する。実部の式を S_R の関数とみなし、虚部の式を S_I の関数とみなすものとする。

$$\begin{cases} f_R(S_R) = -(S_R \tilde{U}_R - S_I \tilde{U}_I) + \bar{W}k \tilde{U}_I - D\tilde{P}_R + Re^{-1}(D^2 - k^2)\tilde{U}_R = 0 \\ f_I(S_I) = -(S_R \tilde{U}_I + S_I \tilde{U}_R) - \bar{W}k \tilde{U}_R - D\tilde{P}_I + Re^{-1}(D^2 - k^2)\tilde{U}_I = 0 \end{cases} \quad (18)$$

これらの式から、その偏微分は、 $\partial f_R(S_R)/\partial S_R = \partial f_I(S_I)/\partial S_I = -\tilde{U}_R$ となるから、以下のようにニュートン法の反復式が得られる。上付きの (n) は反復回数を表すものとする。

$$S_R^{(n+1)} = S_R^{(n)} - C_1 \frac{f_R(S_R^{(n)})}{-\tilde{U}_R^{(n)}}, \quad S_I^{(n+1)} = S_I^{(n)} - C_2 \frac{f_I(S_I^{(n)})}{-\tilde{U}_R^{(n)}} \quad (19)$$

ここで、 C_1, C_2 はニュートン法の収束速度を調整するための定数であり、試行錯誤的に決定される。式(12)から(14)を HSMAC 法にて時間発展的に反復計算する中で、式(19)を任意に選んだ格子点において課すことにより、線形増幅率 S_R と角振動数 S_I が同時に得られる。中立安定状態を得るためには、 S_R がゼロとなるような、 Re, k, S_I の組み合わせを求めたい。波数 k を固定して、いったん得られた解から Re を少しずつ修正して、 S_R がゼロになるように反復修正すればよい。その際、 Re が少し動いたことにより、 S_I の値も多少修正されることになる。この中立 Re 数を求めるためにも、ニュートン法を適用することができる。 S_R を用いて以下のように与えられる。

$$Re^{(n+1)} = Re^{(n)} - C_3 S_R^{(n)} \quad (20)$$

C_3 は収束速度を調整するための正の定数であり、増幅率が正のときは、 Re を下げることを意味する。

解析結果

平面ポアズイユ流れの臨界点は、 $Re_c = 5772.2218$, $k_c = 1.0205474$, $C_c = 0.26400026$ と知られる^[1]. まず、結果に与える格子点数の影響を調べる. 表 1 は、臨界波数 k_c を与えたときに、本差分計算により得られた中立安定状態のレイノルズ数 Re , 角振動数 S_l および位相速度 C を示す. 格子点数を増加させるとレイノルズ数と位相速度は、文献値に近づく傾向が見て取れる. しかしながら、格子点数の増加に対して、値の収束があまり早くなく、さらに高レイノルズ数領域において高精度な解析結果を得るには、より多くの格子点数が必要となる.

表 1 中立安定状態のレイノルズ数および角振動数 ($k_c = 1.0205474$)

格子点数	レイノルズ数 Re	角振動数 $-S_l$	位相速度 C
101	5720.572	0.2699707	0.2645352
201	5767.318	0.2694774	0.2640518
401	5771.866	0.2694287	0.2640041
801	5772.198	0.2694250	0.2640005

図 1 は、臨界点における固有関数（圧力分布と速度ベクトル）の一波長分の可視化（位相速度 C で移動する座標系から眺めた瞬間図）を示す. 等高線の赤い部分は圧力が高く、青い部分は低い. 高压の部分で右向き速度があり、低压の部分で左向き速度が発生しているのがわかる. この波 (Tollmien - Schlichting wave) の位相速度の大きさは、基本流の最大速度を 1 とするような無次元化において、 $C = 0.264$ である. 壁面近傍では境界層が形成されていて、境界層付近の拡大図を図 2 に示す. この図では、圧力の等高線の本数は領域全体で 100 本に変更しているが、その一部の本数だけが示される. 図 3 は、臨界点 ($Re_c = 5772$, $k_c = 1.02$) 付近の中立安定曲線 ($S_R = 0$) を示す. 横軸が波数を、縦軸左がレイノルズ数を、そして縦軸右が角振動数を表す. 曲線の内側の領域で T-S 波は増幅するので Poiseuille 流れは不安定となり、一方で外側の領域では波は減衰するので安定である.

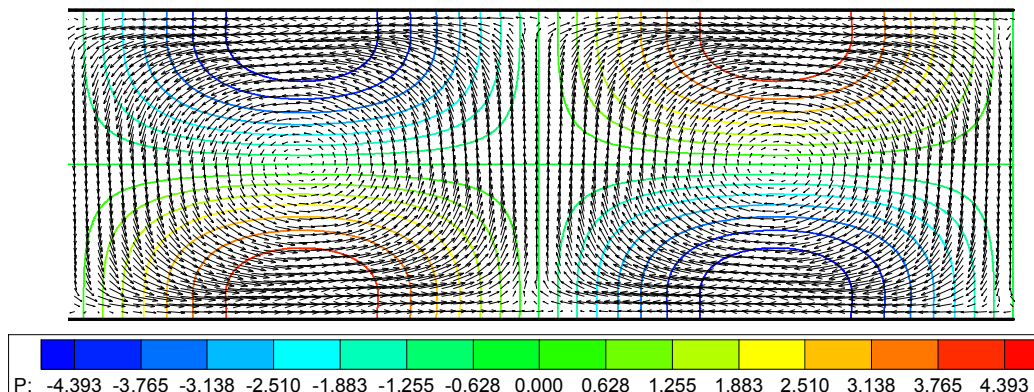


図 1 臨界点における固有関数（圧力分布と速度ベクトル）の一波長分の可視化
($Re_c = 5772$, $k_c = 1.02$)

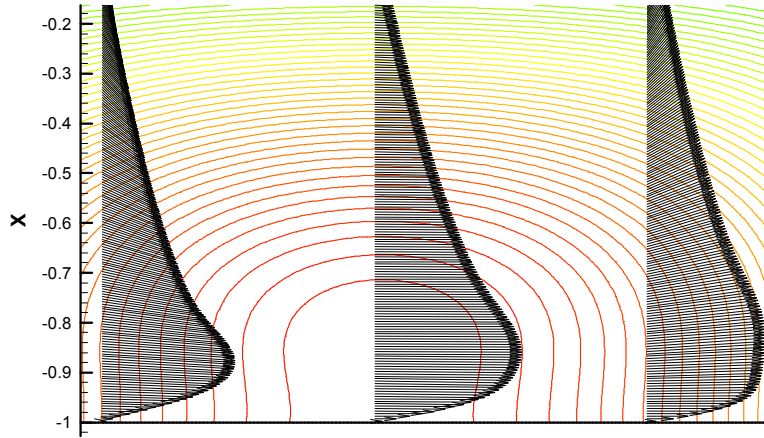


図2 圧力最高点付近における速度ベクトル ($Re_c = 5772, k_c = 1.02$)

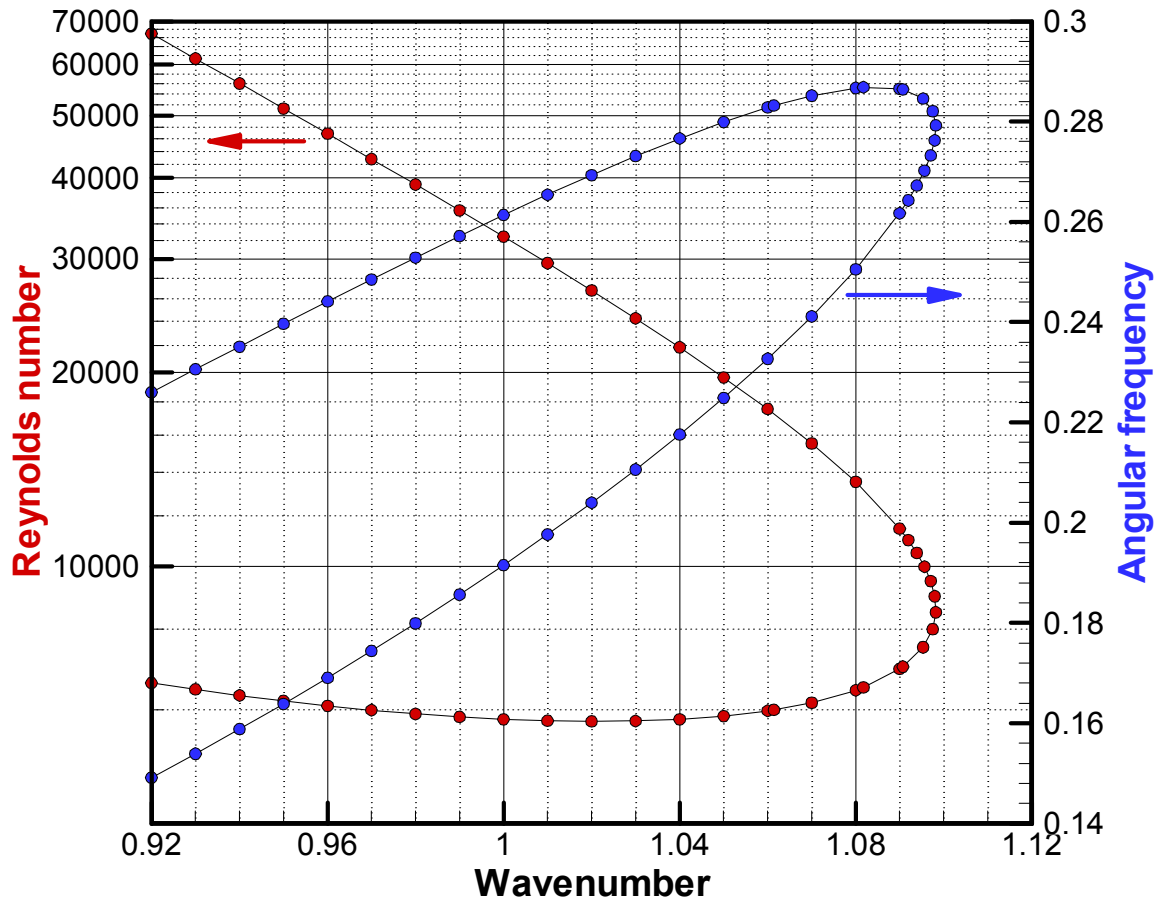


図3 臨界点付近における中立安定曲線 (赤) と対応する角振動数 (青)

参考文献

- [1] 流体力学ハンドブック (第2版), 日本流体力学学会編, 丸善株式会社, p. 273.