

## Rayleigh-Bénard 対流

重力場における水平流体層の熱対流の安定性は、Rayleigh-Bénard 問題として良く知られている<sup>(1)</sup>。Rayleigh の理論的研究に先立って、Bénard が行った実験では、上面が自由表面である場合を扱っている。浮力による影響のみならず、界面張力による影響も重要な役割を果たす。そのようなマランゴニ対流や浮力対流の線形安定性解析、さらにはそれらの複合効果については、日向野<sup>(2,3,4)</sup>によって詳しく研究されている。その三連報の論文では、境界条件が固定端か自由端かどうかの議論に加え、熱的境界条件として Biot 数を用いて一般化され、対流発生限界式を与えている。本稿では、解析モデルとして、重力場中に置かれた水平流体層を考える。流体としては水などの液体を想定し、下面を加熱、上面を冷却するとき、ある臨界値を超えると対流が発生する。それは、温度の高い部分の流体は軽くなり、一方で温度の低い部分の流体は重くなるという不安定性に起因する。本稿では、代表長さには水平流体層の厚さ  $h$  を取るものとする。

### Boussinesq 近似された基礎方程式

本稿においては、デカルト座標系を用いる。水平方向に  $x, y$  軸をとり、重力方向に  $z$  軸をとる。

<連続の式>

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

<運動方程式>

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + g\beta(T - T_0) \quad (4)$$

<エネルギー方程式>

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

ここで、 $T_0$  は、加熱面と冷却面の平均温度、 $\rho_0$  は温度  $T_0$  における密度で定数としている。浮力項の  $\beta$  は温度  $T_0$  における体膨張係数を表す。また、 $\nu$  は動粘性係数であり、 $\alpha$  は熱拡散率を表す。

### 基本状態

線形安定性解析では、基本状態を想定し、その状態が安定であるか不安定であるかを論じる。したがって、まず対称性や次元を落とした系を想定する。本稿で扱う Rayleigh-Bénard 対流の場合は、以下のように想定する。

流体は静止しているとし、速度はゼロである。

$$u_{ss} = v_{ss} = w_{ss} = 0 \quad (6)$$

温度は熱伝導状態であることから

$$T_{ss}(z) = T_h - \frac{T_h - T_c}{h} z \quad (7)$$

となる。圧力は鉛直方向の運動方程式の静止状態におけるつりあいから

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_{ss}}{\partial z} + g\beta(T_{ss} - T_0) \quad (8)$$

となる。

境界条件として、ここでは両固体壁が一定温度で加熱・冷却される場合を示す.

$$\begin{cases} z=h: & u=v=w=0, \quad T=T_c \\ z=0: & u=v=w=0, \quad T=T_h \end{cases} \quad (9)$$

### 線形化

今、基本状態が安定か不安定かを調べたい. そこで、以下のように、基本状態に微小な変動量を加わったものとする.

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_{ss} + u'(x,y,z,t), \quad v(x,y,z,t) = v_{ss} + v'(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) &= w_{ss} + w'(x,y,z,t), \quad T(x,y,z,t) = T_{ss}(z) + T'(x,y,z,t) \\ p(x,y,z,t) &= p_{ss}(z) + p'(x,y,z,t) \end{aligned} \quad (10)$$

これらの式を元の基礎式に代入し、かつ二次の微小量を見捨てる線形化を施すと以下の擾乱方程式が得られる.

### 連続の式

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

### 運動方程式

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} \right) \quad (13)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) + g\beta T' \quad (14)$$

### エネルギー方程式

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = w' \frac{T_h - T_c}{h} + \alpha \left( \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right) \quad (15)$$

境界条件にも基本状態と変動量の和を代入すると、変動量に対する境界条件は以下ようになる.

$$\begin{cases} z=h: & u'=v'=w'=0, \quad T'=0 \\ z=0: & u'=v'=w'=0, \quad T'=0 \end{cases} \quad (16)$$

### ノーマルモード解析

無限に広い平板間の流体層を想定する. そこに生じる微小振幅対流は水平方向にそれぞれ波数  $k_x$ ,  $k_y$  を持つ周期的なものと仮定する. 各変動量を次式のように置く.

$$\phi'(x,y,z,t) = \tilde{\phi}(z) \cdot \exp(ik_x x + ik_y y + st), \quad \phi = {}^t(u,v,w,T,p) \quad (17)$$

ここで、 $k_x$ ,  $k_y$ ,  $s$  はそれぞれ  $x$  方向波数,  $y$  方向波数, 複素角振動数 ( $s = s_r + is_i$ ) を表す. 上式は以下のようにも書ける.

$$\phi' = \underbrace{\tilde{\phi}(z)}_{\text{振幅関数}} \cdot \underbrace{\exp(s_r t)}_{\text{指数関数}} \cdot \underbrace{\exp[i(k_x x + k_y y + s_i t)]}_{\text{三角関数}} \quad (18)$$

$s_r$  は線形増幅率を表す. これが正であれば擾乱は時間とともに増幅するので不安定となり、負であれば擾乱は減衰するので安定となる. 特に  $s_r$  が零の場合を中立安定という.  $s_i$  は角振動数であるが、波数  $k$  とともに波の位相速度に関係する. この式を擾乱方程式に代入すると、結局、振幅関数に関

する以下の連立常微分方程式を得る.

$$ik_x \tilde{u} + ik_y \tilde{v} + \frac{d\tilde{w}}{dz} = 0 \quad (19)$$

$$s\tilde{u} = -\frac{1}{\rho_0} ik_x \tilde{p} + \nu \left( \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \tilde{u} \quad (20)$$

$$s\tilde{v} = -\frac{1}{\rho_0} ik_y \tilde{p} + \nu \left( \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \tilde{v} \quad (21)$$

$$s\tilde{w} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\tilde{p}}{dz} + \nu \left( \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \tilde{w} + g\beta\tilde{T} \quad (22)$$

$$s\tilde{T} = \tilde{w} \frac{T_h - T_c}{h} + \alpha \left( \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \tilde{T} \quad (23)$$

ただし,

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (24)$$

と表記した. 境界条件の式(16)についても振幅関数で表せば

$$\begin{cases} z = h: & \tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{w} = \tilde{T} = 0 \\ z = 0: & \tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{w} = \tilde{T} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

となる.

Chandrasekar によると, Rayleigh-Bénard 対流においては, 安定性交換の原理が成り立つとされる. これは発生する微小攪乱対流が定在的であること, つまり  $s_i = 0$  であることがわかっている. 中立安定状態  $s_r = 0$  を得るには, 式(20)-(23)において左辺をゼロとした各式を解くことに帰着される.

### 圧力を消去して計算する方法

上記の連立常微分方程式を解く為に, 虚数単位および圧力項の消去を考える. 式(20)に  $k_x$  を掛け, 式(21)に  $k_y$  を掛け, それぞれ加えると

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} ik^2 \tilde{p} + \nu \left\{ \frac{d^2}{dz^2} (k_x \tilde{u} + k_y \tilde{v}) - k^2 (k_x \tilde{u} + k_y \tilde{v}) \right\}$$

これに式(19)を代入し, さらに  $z$  で微分すると

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} k^2 \frac{d\tilde{p}}{dz} + \nu \left( \frac{d^4 \tilde{w}}{dz^4} - k^2 \frac{d^2 \tilde{w}}{dz^2} \right)$$

式(22)に  $k^2$  を掛ける

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} k^2 \frac{d\tilde{p}}{dz} + \nu \left( k^2 \frac{d^2 \tilde{w}}{dz^2} - k^4 \tilde{w} \right) + k^2 g\beta\tilde{T}$$

両式の差と取り, 整理して

$$\nu \left( \frac{d^4 \tilde{w}}{dz^4} - 2k^2 \frac{d^2 \tilde{w}}{dz^2} + k^4 \tilde{w} \right) = k^2 g\beta\tilde{T}$$

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 \tilde{w} = \frac{k^2}{\nu} g\beta\tilde{T} \quad (26)$$

一方で, エネルギー式は

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)\tilde{T} = -\frac{T_h - T_c}{\alpha h}\tilde{w} \quad (27)$$

両式から温度を消去すれば,

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)^3\tilde{w} = -k^2\frac{g\beta(T_h - T_c)}{\alpha\nu h}\tilde{w}$$

また両式から速度を消去すれば,

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)^3\tilde{T} = -k^2\frac{g\beta(T_h - T_c)}{\alpha\nu h}\tilde{T}$$

となる. これらの式を無次元化し, まとめると式(28)となる.

$$(D^2 - \bar{k}^2)^3\begin{pmatrix} \tilde{W} \\ \tilde{\Theta} \end{pmatrix} = -\bar{k}^2 Ra \begin{pmatrix} \tilde{W} \\ \tilde{\Theta} \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{cases} (D^2 - \bar{k}^2)^2 \tilde{W} = \bar{k}^2 Ra \cdot \tilde{\Theta} \\ (D^2 - \bar{k}^2) \tilde{\Theta} = -\tilde{W} \end{cases} \quad (28)$$

ただし, 無次元の変数および無次元数は

$$D = \frac{d}{dZ}, \quad Z = \frac{z}{h}, \quad \tilde{W} = \frac{\tilde{w}}{\alpha/h}, \quad \tilde{\Theta} = \frac{\tilde{T}}{T_h - T_c}, \quad \bar{k} = hk = h\sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad Ra = \frac{g\beta(T_h - T_c)h^3}{\alpha\nu} \quad (29)$$

と定義される.

次に式(28)に対する境界条件を考える. 鉛直方向の速度成分 $\tilde{W}$ をどう与えるかを考えなくてはならない. 自明なのは,  $\tilde{W} = 0$ であり, これは境界面を貫かない条件を示す. まず, 固体壁の場合のすべりなし条件を考えたい. これは水平方向の速度成分 $u, v$ がゼロで与えられる. したがって, 連続の式を壁面上で考慮して次式を得る.

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \quad (30)$$

このように, 固体壁の場合における法線速度成分の境界条件は, 1階微分が零として与えられる. ちなみに自由界面の場合は, 連続の式を $z$ で微分することにより

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right\}$$

もし, 剪断応力がなければ (マランゴニ効果を考慮しない自由界面に相当)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (31)$$

となる. 法線速度成分の2階微分が零として与えられる. マランゴニ効果を考慮する場合は, 力のつりあいから次式を得る.

$$\mu\frac{\partial u}{\partial z} = \sigma_T\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \mu\frac{\partial v}{\partial z} = \sigma_T\frac{\partial T}{\partial y} \quad \left(\text{where } \sigma_T \equiv \frac{\partial\sigma}{\partial T}\right) \quad (32)$$

ここで,  $\sigma_T$ は界面張力の温度係数であり, 近似的に一定とみなされる. マランゴニ効果を含む場合の境界条件は,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sigma_T}{\mu}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sigma_T}{\mu}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right\} = -\frac{\sigma_T}{\mu}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \quad (33)$$

となる. これを振幅関数で与えれば, 次式となる.

$$\frac{d^2\tilde{w}}{dz^2} = k^2\frac{\sigma_T}{\mu}\tilde{T} \quad (34)$$

この方法では, 境界に対する接線速度成分が消去されているので,  $W$ に関して4階の微分方程式の

境界値問題を解くには、境界を貫かない条件に加えて、例えば式(34)が必要である(上下面で計4個)。

### HSMAC 法で解く方法

式(19)から(23)を無次元化すると、

$$\bar{k}_x \tilde{U} + \bar{k}_y \tilde{V} - iD\tilde{W} = 0 \quad (35)$$

$$0 = -i\bar{k}_x \tilde{P} + (D^2 - \bar{k}^2) \tilde{U} \quad (36)$$

$$0 = -i\bar{k}_y \tilde{P} + (D^2 - \bar{k}^2) \tilde{V} \quad (37)$$

$$0 = -D\tilde{P} + (D^2 - \bar{k}^2) \tilde{W} + Ra \cdot \tilde{\Theta} \quad (38)$$

$$0 = \tilde{W} + (D^2 - \bar{k}^2) \tilde{\Theta} \quad (39)$$

ただし、

$$D = \frac{d}{dZ}, \quad Z = \frac{z}{h}, \quad (\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}) = \frac{(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})}{\alpha/h}, \quad \tilde{\Theta} = \frac{\tilde{T}}{T_h - T_c}, \quad \tilde{P} = \frac{\tilde{p}}{\rho_0 \alpha \nu / h^2}, \quad (40)$$

$$\bar{k} = hk = h\sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad \bar{k}_x = hk_x, \quad \bar{k}_y = hk_y, \quad Ra = \frac{g\beta(T_h - T_c)h^3}{\alpha\nu}$$

境界条件は、すべりなしの場合、式(25)から

$$\begin{cases} Z=1: \tilde{U} = \tilde{V} = \tilde{W} = \tilde{\Theta} = 0 \\ Z=0: \tilde{U} = \tilde{V} = \tilde{W} = \tilde{\Theta} = 0 \end{cases} \quad (\text{for no-slip condition}) \quad (41)$$

となる。

一方で、自由界面かつマランゴニ効果を考慮する場合は、式(32)から

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = \underbrace{\frac{\sigma_T(T_h - T_c)h}{\mu\alpha}}_{-Ma} \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad \frac{\partial V}{\partial Z} = \underbrace{\frac{\sigma_T(T_h - T_c)h}{\mu\alpha}}_{-Ma} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \quad (42)$$

となる。ここで、次式はマランゴニ数の定義を表す。

$$Ma = -\frac{\sigma_T(T_h - T_c)h}{\mu\alpha} \quad (43)$$

多くの場合、 $\sigma_T$ は負の値を取るので、ここでは  $Ma$  が正になるように定義した。振幅関数で与えれば各速度成分(温度を除く)の境界条件は、以下のように与えられる。

$$\begin{cases} Z=1: D\tilde{U} = -i\bar{k}_x Ma_1 \cdot \tilde{\Theta}, \quad D\tilde{V} = -i\bar{k}_y Ma_1 \cdot \tilde{\Theta}, \quad \tilde{W} = 0 \\ Z=0: D\tilde{U} = -i\bar{k}_x Ma_0 \cdot \tilde{\Theta}, \quad D\tilde{V} = -i\bar{k}_y Ma_0 \cdot \tilde{\Theta}, \quad \tilde{W} = 0 \end{cases} \quad (44)$$

HSMAC 法においては、式(38)に示されるように、 $\tilde{W}$  に関して2階の微分方程式であるので、貫かない条件( $\tilde{W}=0$ )だけで十分である(上下壁で計2個)。その代わりに、式(36),(37)を解いている訳だから、接線成分 $\tilde{U}, \tilde{V}$ に関する境界条件が必要であり、式(44)はそれを意味する。

式(35)-(39)および式(44)のそれぞれの実部セットと虚部セットの内、必要セットだけ(2セット同様なものが出てきて、そのうち1セットだけ解けば十分)を数値計算すれば、本問題では十分である。

### 計算の実例

ここでは、水平方向には  $x$  方向だけを仮定した場合 ( $y$  方向の変化を考えない) を考え、無次元波数は  $\bar{k} = hk_x$  とする。また実部か虚部を示す下付添え字は書くのを省く。境界条件としては、最も基本的な場合、ここでは温度は一定であるとし、速度は上下境界とも固体壁の場合を想定する。

$$\bar{k}\tilde{U} - D\tilde{W} = 0 \quad (45)$$

$$0 = -\bar{k}\tilde{P} + (D^2 - \bar{k}^2)\tilde{U} \quad (46)$$

$$0 = -D\tilde{P} + (D^2 - \bar{k}^2)\tilde{W} + Ra \cdot \tilde{\Theta} \quad (47)$$

$$0 = \tilde{W} + (D^2 - \bar{k}^2)\tilde{\Theta} \quad (48)$$

$$\begin{cases} Z=1: \tilde{U}=0, \tilde{W}=0, \tilde{\Theta}=0 \\ Z=0: \tilde{U}=0, \tilde{W}=0, \tilde{\Theta}=0 \end{cases} \quad (\text{Rigid - Rigid}) \quad (49)$$

式(46)から(48)に仮想時間項を導入し、HSMAC法を用いて解く場合、計算条件として与えた初期  $Ra$  数が中立安定の値より大きい場合には、速度、温度、圧力といった各振幅関数（数値解）は増大する。一方で初期  $Ra$  数が中立安定の値より小さい場合には、各振幅関数は減衰する。中立安定な  $Ra$  数の値を与えることができた場合は、数値解は増幅も減衰もしない。そこで、計算中に数値解が増幅する傾向を示したら  $Ra$  数を計算中に下げてやり、逆に減衰する傾向を示したら  $Ra$  数を計算中に上げてやる方法を採用。その下げたり上げたりする調整には Newton 法を用いれば良いだろう。つまり、解が激しく増減するときには  $Ra$  数の調整を大きくし、解が定常になったら、その調整が零になるようにすればよい。

HSMAC法を使うにあたり、 $Z$ 方向の一次元スタッガード格子を用いる。壁面に対して法線方向の速度成分  $\tilde{W}$  および温度  $\tilde{\Theta}$  についてはセル界面を定義点とし、接線方向の速度成分  $\tilde{U}, \tilde{V}$  および圧力  $\tilde{P}$  についてはセル中心を定義点とした。4次精度の中心差分式を用いて離散化した。図1に、中立安定状態における各振幅関数の分布を示す。本解析結果によると、臨界レイリー数  $Ra_c$  は 1707.76178、臨界波数  $\bar{k}_c$  は 3.116324 と得られた。図2には、その臨界波数を考慮して、流れ関数で可視化した様子を示す。縦横比がほぼ1の対流渦が発生することが理解される。

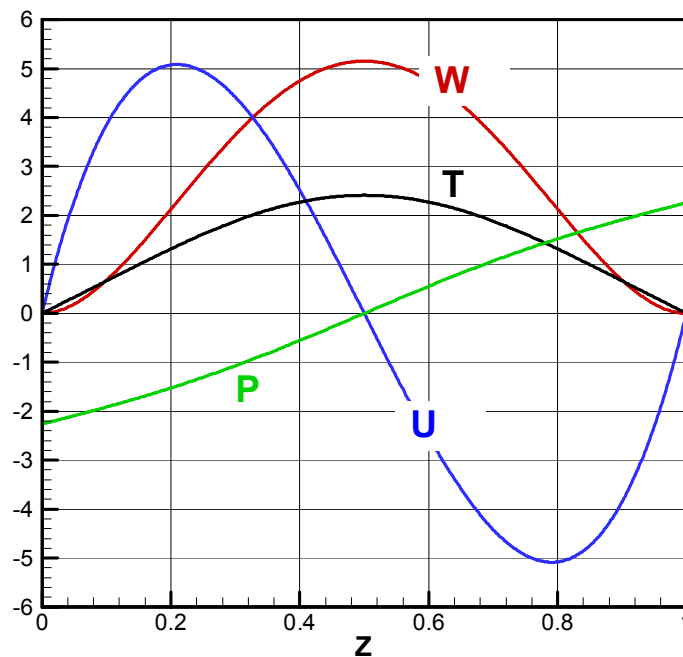


図1 各振幅関数（縦軸の数字に意味はない）

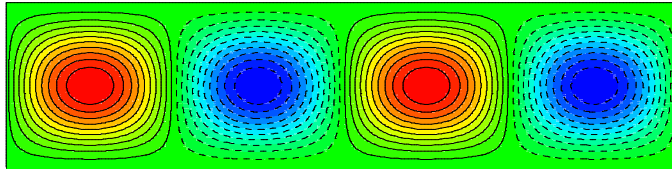


図2 流れ関数 (2波長分の可視化)

図3には、加熱面と冷却面のそれぞれが一定温度に保たれる場合における中立安定曲線を示す。縦軸は中立の Rayleigh 数を、横軸は無次元波数を表す。3つの曲線は境界条件の違いを表し、それぞれ上から、両面が固体壁、上が自由面で下が固体壁、両面が自由面を示す。各曲線の極小点が臨界波数(横軸)、臨界 Rayleigh 数(縦軸)を表す。両面が固体壁の場合は、先に示したように、臨界波数は 3.1163 で臨界レイリー数 1707.76 をとるが、境界条件として自由面が含まれると、臨界 Rayleigh 数が小さくなるのがわかる。図4, 5, 6は熱的境界条件の影響を、上記の3つの場合に対して、それぞれ個別に示したものである。熱的条件は、下記の参考文献<sup>(2,3,4)</sup>にあるように、一般には Biot 数を使って表されるが、ここでは「一様熱流束条件」あるいは「等温条件」で計算を行い、たゞし、少なくともどちらか一面は等温条件の場合に限った場合を示す。図5の場合においては、固体壁を等温条件とするか一様熱流束条件にするかの違いが生じ、3つ曲線を描くことができる。

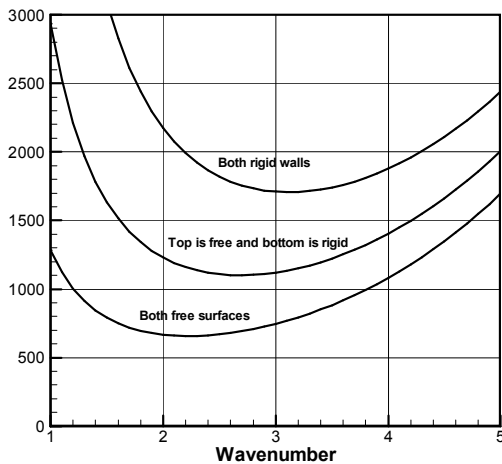


図3 一定温度の場合

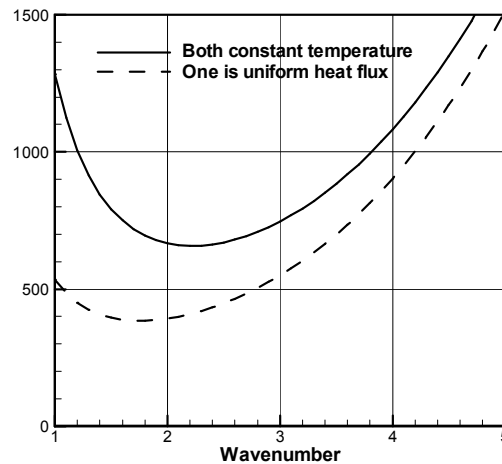


図4 両面自由界面の場合

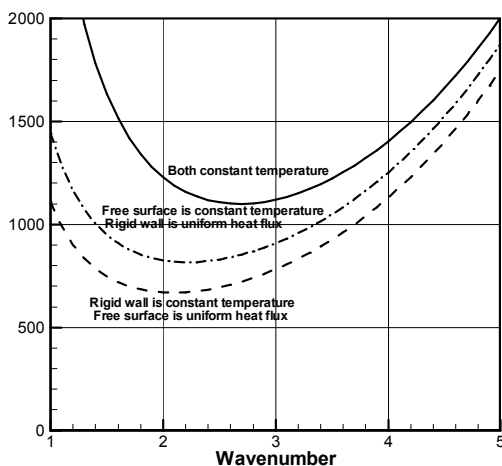


図5 一面固体壁、一面自由界面の場合

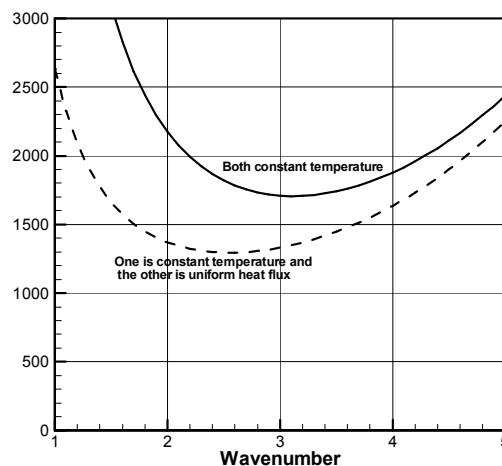


図6 両面固体壁の場合

## 参考文献

- (1) Chandrasekar, S., Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Dover, (1961).
- (2) 日向野三雄, 液体層の熱的不安定性 (第一報, 界面張力による場合), 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 47, No. 413 (1981), pp. 105-112.
- (3) 日向野三雄, 液体層の熱的不安定性 (第二報, 浮力による場合), 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 47, No. 413 (1981), pp. 113-120.
- (4) 日向野三雄, 液体層の熱的不安定性 (第三報, 浮力と界面張力の共存する場合), 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 47, No. 420 (1981), pp. 1571-1577.