

## 急に運動を始めた平板上の流れ (Rayleigh flow)

### §1. 基礎方程式と常微分化

無限に広い平板で区切られた半無限に広がる流体があり、初期状態として流体は静止している。この中で、ある瞬間から平板を一定速度で板自身に平行に動かしたときに生じる流れを考える。板の運動方向を  $x$ 、板からの距離を  $y$  とする。平板に対して直交する速度成分  $v$  はゼロになり、運動方程式は以下のように与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

この方程式が満たすべき境界条件は、次式となる。

$$\begin{cases} u = u_w & \text{at } y = 0 \\ u \rightarrow 0 & \text{as } y \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2)$$

ここで、以下で表わされる無次元速度と相似変数を導入し、式(1)を常微分化する（付録参照）。

$$u = u_w U(\eta), \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \quad (3)$$

この変換の結果、次の常微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 U}{d\eta^2} + 2\eta \frac{dU}{d\eta} = 0 \quad (U'' + 2\eta U' = 0) \quad (4)$$

また境界条件は、

$$\begin{cases} U = 1 & \text{at } \eta = 0 \\ U \rightarrow 0 & \text{as } \eta \rightarrow \infty \end{cases} \quad (5)$$

である。結局、式(5)の境界条件の下で、式(4)の常微分方程式を解けば良い。実際、式(5)を満たす式(4)は理論解析的に解ける。

### 付録 相似変換について

この問題では、系を特徴づける代表的な長さや時間スケールというものがないことに注目。まず、無次元の時間、速度、座標を次のように定める。

$$\tau = \frac{t}{t_a}, \quad U = \frac{u}{u_a}, \quad Y = \frac{y}{y_a} \quad (6)$$

ここで、 $t_a, u_a, y_a$  はそれぞれ、時間、速度、長さの次元を持つ未定参照量（下付添字  $a$ ）を表す。式(6)を、運動方程式(1)および境界条件(2)に代入する。

$$\frac{\partial(u_a U)}{\partial(t_a \tau)} = \nu \frac{\partial^2(u_a U)}{\partial(y_a Y)^2} \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial \tau} = \left( \frac{\nu t_a}{y_a^2} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}$$

$$\begin{cases} u_a U = u_w & \text{at } y_a Y = 0 \\ u_a U \rightarrow 0 & \text{at } y_a Y \rightarrow \infty \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U = (u_w/u_a) & \text{at } Y = 0 \\ U \rightarrow 0 & \text{at } Y \rightarrow \infty \end{cases}$$

したがって、今、求めたい無次元速度  $U$  は、次のような各無次元量の関数

$$U = f\left[\tau, Y, \left(\frac{vt_a}{y_a^2}\right), \left(\frac{u_w}{u_a}\right)\right] \quad (7)$$

となり、 $Y$  以外の  $\tau$  や括弧の中身を順次 1 に等しいと置き、未定参照量を決めることができる。

$$\frac{vt_a}{y_a^2} = 1, \quad \frac{u_w}{u_a} = 1, \quad \tau = \frac{t}{t_a} = 1$$

その結果、各未定参照量が

$$y_a = \sqrt{vt}, \quad u_a = u_w, \quad t_a = t$$

と得られ、 $Y = y/\sqrt{vt}$  という新しい複合変数が考えられる。ここでは、その分母に定数 2 を任意に入れ、 $\eta$  という新変数で表されるとする。 $y$  と  $t$  という 2 変数であるがゆえに偏微分方程式であった本系が常微分方程式で表されることが示唆される。式(7)より

$$U = f(\eta), \quad \eta \equiv \frac{y}{2\sqrt{vt}} \quad (8)$$

を得る。式(4)の解（誤差関数を使って厳密に与えられる）は、図 1 のように示される。

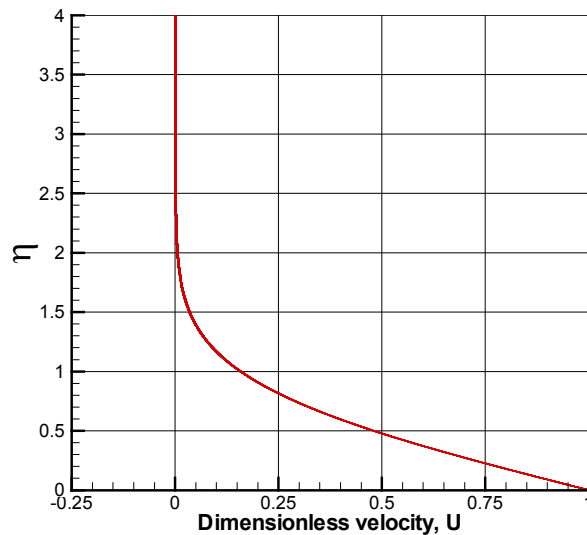


図 1

## §2. 常微分方程式の数値解法（差分法）

境界条件は、図1から判断して、 $\eta \rightarrow \infty$ の代わりに $\eta = 4$ とする。

$$\begin{cases} \eta = 0: U = 1 \\ \eta = 4: U = 0 \end{cases} \quad (9)$$

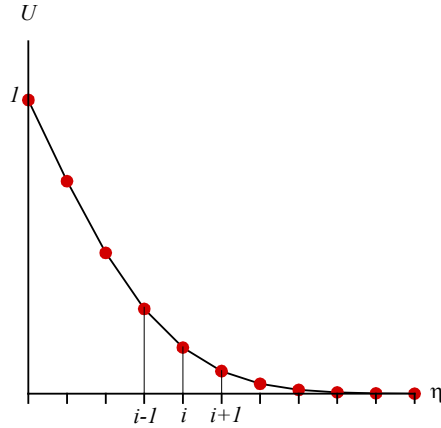


図2

図2（縦軸と横軸を反転）に示すように、 $U(\eta)$ の曲線を求めたい訳だが、差分法の考えに基づき、有限個の離散点の集まりとして近似的に曲線を表現する。簡単の為に、点と点の間隔は全て等しく $\Delta\eta$ とする。式(4)を中心差分で離散化する。この式は近似式ということになる。もちろん $\Delta\eta$ を小さくすればするほど、近似の精度は高くなり、厳密解に近づく。

$$\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta\eta)^2} + 2\eta_i \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2(\Delta\eta)} = 0, \quad (i = 2, 3, \dots, N-1)$$

上式を整理すると、

$$\underbrace{(1 - \eta_i(\Delta\eta))}_{\alpha_i} U_{i-1} - 2U_i + \underbrace{(1 + \eta_i(\Delta\eta))}_{\beta_i} U_{i+1} = 0, \quad (i = 2, 3, \dots, N-1) \quad (10)$$

格子番号（下付添字）は1から始まるよう定義しているので、 $\eta_i = (i-1)(\Delta\eta)$ である。

境界条件(9)は、次式で与えられる。

$$\begin{cases} \eta = 0: U_1 = 1 \\ \eta = 4: U_N = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$N$ は格子点数（境界上を含む）を表す。計算領域の分割数は $N-1$ となる。

以下、例えば、 $N=7$ とする。式(10)において、 $i=2$ を代入すると、

$$\alpha_2 U_1 - 2U_2 + \beta_2 U_3 = 0$$

$i=3$  を代入すると,

$$\alpha_3 U_2 - 2U_3 + \beta_3 U_4 = 0$$

このような手順を  $i=6$  まで行い, 結局以下のように, 5 元連立方程式が得られる.

$$\begin{pmatrix} -2 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & -2 & \beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_4 & -2 & \beta_4 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_5 & -2 & \beta_5 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_2 U_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\beta_{N-1} U_N \end{pmatrix} \quad (12)$$

右辺は既知であるので, 線形の常微分方程式は連立方程式に帰着される. このような三重対角行列の場合は, 例えば, 行列の直接計算法として知られるトーマス法によって容易に解が求まる.

### 行列方程式の反復解法

一般に流体計算に現れる行列の階数は高く, 反復法が用いられることが多い. この節では, 反復法の一つであり最も簡単なヤコビ法について述べる. まず, 式(12)を下三角, 対角, 上三角に分ける.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_2 U_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\beta_{N-1} U_N \end{pmatrix} \quad (13)$$

ヤコビ法では, 対角成分のみ左辺 (反復ステップ  $n+1$ ) に, それ以外は右辺 (反復ステップ  $n$ ) に移し, 反復計算するものである.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix}}_{\vec{U}^{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\alpha_2 U_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\beta_{N-1} U_N \end{pmatrix}}_{\vec{b}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_6 & 0 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix}}_{\vec{U}^n} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix}}_{\vec{U}^n} \quad (14)$$

つまり, 以下の式を反復計算するのがヤコビ法である.

$$\vec{U}^{n+1} = D^{-1} [\vec{b} - (L+U)\vec{U}^n] \quad (15)$$

これらは, 成分で書けば, まとめて次式のように書けることがわかる.

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\alpha_i U_{i-1}^n + \beta_i U_{i+1}^n), \quad (i=2,3,4,5,6) \quad (16)$$

境界条件(11)を用いながら, この式(16)を反復して計算することで各格子点における値が徐々に収束していき, 完全に収束したときが, 式(4)の数値解となる. なお, ヤコビ法での収束をはやめたものに, ガウス・ザイデル法やSOR法がある.

ガウス・ザイデル法での手計算の実例

ここでは、簡単化した設定の境界条件

$$\begin{cases} \eta = 0: U = 1 \\ \eta = 2: U = 0 \end{cases}$$

のもと、二次精度の中心差分法を用いて、近似計算することを考える。右図のように、 $\eta$ の領域を4分割としたとき、格子点の数は境界を含めて5となる。境界上の点は、 $U_1 = 1$ ,  $U_5 = 0$ と置ける。このとき、 $U_2, U_3, U_4$ の値をガウス・ザイデル法により手計算で求めるものとする。

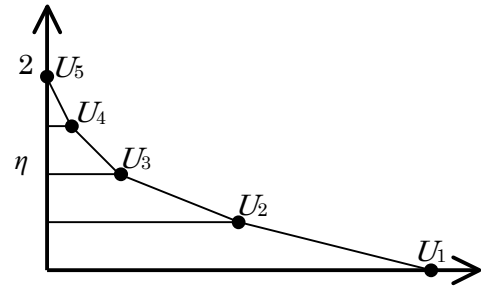


図3

漸化式は次式で与えられる。空間格子番号が小さい方の項の時間ステップが  $n+1$  なのに注意。計算して新しく得られた値は、次のステップに移る前に即座に続く計算に反映させていくものである。ヤコビ法との違いはここだけであるが、収束はずっとはよくなる。

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{8} \left\{ (5-i)U_{i-1}^{n+1} + (3+i)U_{i+1}^n \right\}, \quad (i = 2, 3, 4)$$

< 1回目 >

$$U_2^1 = \frac{1}{8} \left\{ (5-2) \underbrace{U_1^0}_1 + (3+2)U_3^0 \right\} = \frac{1}{8} (3 \cdot 1 + 5U_3^0) = \frac{3}{8}$$

$$U_3^1 = \frac{1}{8} \left\{ (5-3)U_2^1 + (3+3)U_4^0 \right\} = \frac{1}{4} (U_2^1 + 3U_4^0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{32}$$

$$U_4^1 = \frac{1}{8} \left\{ (5-4)U_3^1 + (3+4) \underbrace{U_5^0}_0 \right\} = \frac{1}{8} U_3^1 = \frac{3}{256}$$

< 2回目 >

$$U_2^2 = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} U_3^1 = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{32} = \frac{111}{256}$$

$$U_3^2 = \frac{1}{4} (U_2^2 + 3U_4^1) = \frac{1}{4} \left( \frac{111}{256} + 3 \cdot \frac{3}{256} \right) = \frac{15}{128}$$

$$U_4^2 = \frac{1}{8} U_3^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{15}{128} = \frac{15}{1024}$$

< 3回目 >

$$U_2^3 = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} U_3^2 = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{15}{128} = \frac{459}{1024}$$

$$U_3^3 = \frac{1}{4} (U_2^3 + 3U_4^2) = \frac{1}{4} \left( \frac{459}{1024} + 3 \cdot \frac{15}{1024} \right) = \frac{126}{1024} = \frac{63}{512}$$

$$U_4^3 = \frac{1}{8} U_3^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{63}{512} = \frac{63}{4096}$$

< 4回目 >

$$U_2^4 = \frac{3}{8} + \frac{5}{8}U_3^3 = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{63}{512} = \frac{1851}{4096}$$

$$U_3^4 = \frac{1}{4}(U_2^4 + 3U_4^3) = \frac{1}{4}\left(\frac{1851}{4096} + 3 \cdot \frac{63}{4096}\right) = \frac{255}{2048}$$

$$U_4^4 = \frac{1}{8}U_3^4 = \frac{1}{8} \frac{255}{2048} = \frac{2^8 - 1}{2^{14}}$$

< 5回目 >

$$U_2^5 = \frac{3}{8} + \frac{5}{8}U_3^4 = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{255}{2048} = \frac{7419}{2^{14}} = \frac{29 \cdot 2^8 - 5}{2^{14}}$$

$$U_3^5 = \frac{1}{4}(U_2^5 + 3U_4^4) = \frac{1}{4}\left(\frac{29 \cdot 2^8 - 5}{2^{14}} + 3 \cdot \frac{2^8 - 1}{2^{14}}\right) = \frac{2^{10} - 1}{2^{13}}$$

$$U_4^5 = \frac{1}{8}U_3^5 = \frac{1}{8} \frac{2^{10} - 1}{2^{13}} = \frac{2^{10} - 1}{2^{16}}$$

ここまでの結果より一般項は、次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} U_2^k &= \frac{29 \cdot 2^{2k-2} - 5}{2^{2k+4}} \\ U_3^k &= \frac{2^{2k} - 1}{2^{2k+3}} \\ U_4^k &= \frac{2^{2k} - 1}{2^{2k+6}} \end{aligned} \right\} \text{ (for } k \geq 1)$$

収束値は,  $U_2^\infty \rightarrow \frac{29}{64}$   
 $U_3^\infty \rightarrow \frac{1}{8}$   
 $U_4^\infty \rightarrow \frac{1}{64}$

表にまとめると以下のようなになる.

Iteration	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_5$
0	1	0	0	0	0
1	1	3/8	3/32	3/256	0
2	1	111/256	15/128	15/1024	0
3	1	459/1024	63/512	63/4096	0
4	1	1851/4096	255/2048	255/16384	0
5	1	$(29 \cdot 2^8 - 5)/2^{14}$	$(2^{10} - 1)/2^{13}$	$(2^{10} - 1)/2^{16}$	0
$k$	1	$\frac{29 \cdot 2^{2k-2} - 5}{2^{2k+4}}$	$\frac{2^{2k} - 1}{2^{2k+3}}$	$\frac{2^{2k} - 1}{2^{2k+6}}$	0
$\infty$	1	29/64	1/8	1/64	0

一方で、陰解法では、漸化式は次式で与えられる。

$$(5-i)U_{i-1} - 8U_i + (3+i)U_{i+1} = 0, \quad (i = 2, 3, 4)$$

$$-8U_2 + 5U_3 = -3U_1$$

$$2U_2 - 8U_3 + 6U_4 = 0$$

$$U_3 - 8U_4 = -7U_5$$

境界条件を代入して、行列形式で書きなおす。

$$\begin{pmatrix} -8 & 5 & 0 \\ 2 & -8 & 6 \\ 0 & 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これは容易に解けて、 $\begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 29 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$  となり、反復法と同じ結果を得る。

非常に少ない格子点数で、陽解法（ガウス・ザイデル法）と陰解法を比較した。未知数が3点であれば、陰解法での計算は直接的で効率が良い。格子点数が多くなると、行列方程式を解くために、陽解法（人間が行う手計算で無理だが、コンピュータを使えば容易）を用いることになる。

### §3. シューティング法

ここでは、常微分方程式の境界値問題を初期値問題に置き換え、未定の初期値を適宜予測して数値積分し、もう一方の境界条件を満たすかどうか判定し、その操作を繰り返す方法を紹介する。再度、元の式を示す。

$$\frac{d^2U}{d\eta^2} = -2\eta \frac{dU}{d\eta} \tag{17}$$

ここで、 $dU/d\eta = V$  と置き、二つの連立常微分方程式に分離する。

$$\frac{dV}{d\eta} = -2\eta V, \quad \frac{dU}{d\eta} = V \tag{18}$$

ルンゲ・クッタ法を適用することを考える。

$$\begin{cases} \frac{dV}{d\eta} = -2\eta V, & V(\eta=0) = V^{(0)} = \text{unknown} \\ \frac{dU}{d\eta} = V, & U(\eta=0) = U^{(0)} = 1 \end{cases} \tag{19}$$

ここで、上付き()は反復のステップ数を表す。式(19)では、初期値を表し、速度勾配値  $V^{(0)}$  を適宜定めて積分を開始する。ここで、ルンゲ・クッタ法の2次公式を適用すると、

$$\begin{cases} \Delta V_1 = -\Delta\eta \cdot 2\eta^{(n)} \cdot V^{(n)}, & \Delta U_1 = \Delta\eta \cdot V^{(n)}, \\ \Delta V_2 = -\Delta\eta \cdot 2(\eta^{(n)} + \Delta\eta) \cdot (V^{(n)} + \Delta V_1), & \Delta U_2 = \Delta\eta \cdot (V^{(n)} + \Delta V_1), \\ V^{(n+1)} = V^{(n)} + \frac{1}{2}(\Delta V_1 + \Delta V_2), & U^{(n+1)} = U^{(n)} + \frac{1}{2}(\Delta U_1 + \Delta U_2), & \eta^{(n+1)} = \eta^{(n)} + \Delta\eta \end{cases} \quad (20)$$

と表される。下の図は、数値計算結果である。また、フォートランによるコード例を次頁に示す。初期値としての速度勾配  $V$  をおよそ  $-1.128379$  としたとき、 $\eta$  が大きいところでの速度が  $U = 0$  を満たす。

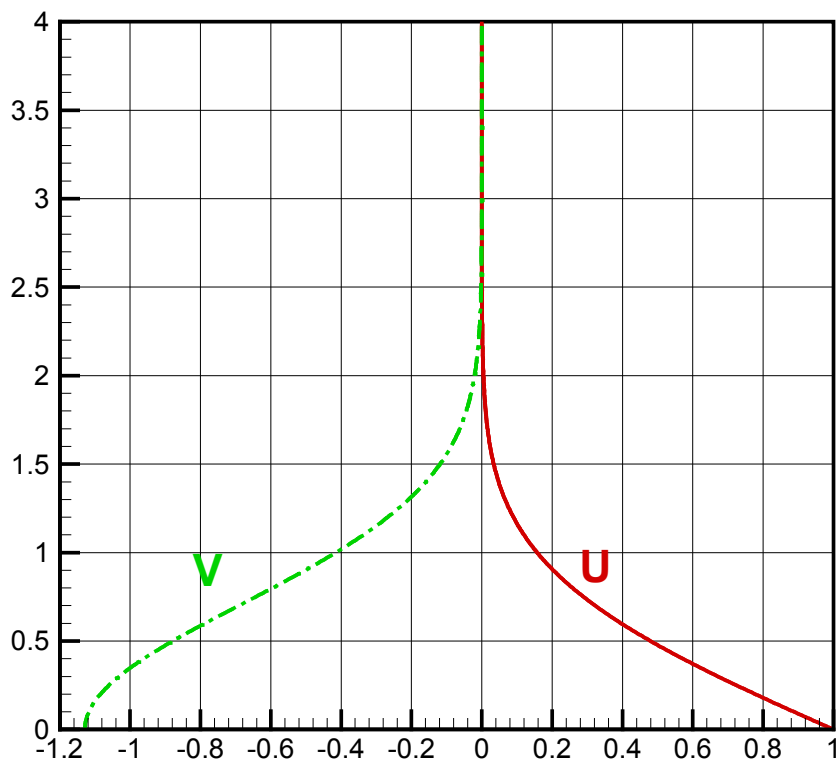


図4 2次公式による Rayleigh の流れの計算事例  
(赤は速度，緑は速度勾配を表す)



```

* Runge-Kutta for solving Rayleigh problem
*
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
* Xlast=sekibun no owari (until 4.0)
XLAST=4.0
* Sekibun no kizami-haba
H=0.001
* Initial values
X=0.0
U=1.0
* The below value should be determined by a Shooting Method.
V=-1.128379
OPEN(10,FILE='RK2-Ra-a.plt')
II=0
100 CONTINUE
II=II+1
WRITE(6,997) X,U,V
IF(MOD(II,10).EQ.1) THEN
WRITE(10,997) U, X, V
ENDIF
*
DV1=-H*2.0*X*V
DU1= H*V
*
DV2=-H*2.0*(X+H)*(V+DV1)
DU2= H*(V+DV1)
*
V=V+(DV1+DV2)/2.0
U=U+(DU1+DU2)/2.0
X=X+H
IF(X.LE.XLAST) GO TO 100
CLOSE(10)
200 STOP
*
997 FORMAT(F9.6,10F14.6)
999 FORMAT(2F10.0)
END

```