回転座標系における MHD 方程式

本稿では，MHD 近似のもと回転座標系での基礎方程式を考える．ナブラ演算子（空間微分）に加えて，電流密度，磁束密度，ベクトルポテンシャルは，慣性系か回転系かに依らず不変として考え，オームの法則やファラデーの法則などを議論する．

１．オームの法則の電磁ポテンシャルによる表現

$$\vec{j}_S=\sigma\left(-\vec{\nabla}\varphi_S-\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_S+\vec{u}_S\times\vec{B}\right)$$

ここで，下付き添え字 S は慣性系を，R は回転系を表す．

$\vec{u}_S=\vec{u}_R+\vec{\Omega}\times\vec{r}$，$\underbrace{\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_S=\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_R-\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{\nabla}\vec{A}+\vec{\Omega}\times\vec{A}}_{\left(\frac{D\vec{A}}{Dt}\right)_S=\left(\frac{D\vec{A}}{Dt}\right)_R+\vec{\Omega}\times\vec{A}}$ を代入する．

$$\vec{j}_S=\sigma\left(-\vec{\nabla}\varphi_S-\left[\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_R-\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{\nabla}\vec{A}+\vec{\Omega}\times\vec{A}\right]+\left(\vec{u}_R+\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{B}\right)$$

少し式変形して

$$\vec{j}_S=\sigma\left(-\vec{\nabla}\varphi_S\underbrace{+\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{\nabla}\vec{A}}_{[1]}-\vec{\Omega}\times\vec{A}+\underbrace{\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)}_{[2]}-\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_R+\vec{u}_R\times\vec{B}\right)$$

この青字の部分が無くなるように，回転系のスカラポテンシャルを定義したい．まず，以下のベクトル演算公式を利用する．

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)=\vec{C}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)+\vec{C}\cdot\vec{\nabla}\vec{A}+\vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{C}\right)+\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\vec{C}$$

$\vec{C}$ の代わりに $\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)$ を代入すると，

$$\vec{\nabla}\left[\vec{A}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\right]=\underbrace{\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)}_{[2]}+\underbrace{\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{\nabla}\vec{A}}_{[1]}+\underbrace{\vec{A}\times\underbrace{\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\right]}_{2\vec{\Omega}}+\underbrace{\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)}_{\vec{\Omega}\times\vec{A}}}_{-\vec{\Omega}\times\vec{A}}$$

となる．これより，青字部分は，

$$\underbrace{\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{\nabla}\vec{A}}_{[1]}-\vec{\Omega}\times\vec{A}+\underbrace{\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)}_{[2]}=\vec{\nabla}\left[\vec{A}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\right]$$

と書ける．したがって，

$$\vec{j}_R = \sigma\left(-\vec{\nabla}\underbrace{\left[\varphi_S - \vec{A}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\right]}_{\varphi_R} - \left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_R + \vec{u}_R\times\vec{B}\right) = \sigma\left(-\vec{\nabla}\varphi_R - \left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_R + \vec{u}_R\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\right)$$

これより，慣性系と回転系のスカラポテンシャルの関係式は，

$$\varphi_S = \varphi_R + \vec{A}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)$$

と与えられる．ちなみに，次式のゲージ変換

$$\vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \vec{\nabla}f, \quad \varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\partial f}{\partial t}$$

に対しても上の関係式は成り立つ．

$$\left(\varphi_2\right)_S = \left(\varphi_2\right)_R + \vec{A}_2\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)$$

に対して，ゲージ変換の式を代入し

$$\left(\varphi_1 - \frac{\partial f}{\partial t}\right)_S = \left(\varphi_1 - \frac{\partial f}{\partial t}\right)_R + \left(\vec{A}_1 + \vec{\nabla}f\right)\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)$$

整理すると

$$\left(\varphi_1\right)_S = \left(\varphi_1\right)_R + \vec{A}_1\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_S - \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_R + \vec{\nabla}f\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)}_{0} \quad \because \quad \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_S = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_R - \left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{\nabla}f}_{\left(\frac{Df}{Dt}\right)_S = \left(\frac{Df}{Dt}\right)_R}$$

となり，下付き添字が２から１に変わっただけである．

２．オームの法則の電場による表現

$$\vec{j}_S = \sigma\left(\vec{E}_S + \vec{u}_S\times\vec{B}\right)$$

ここに，$\vec{u}_S = \vec{u}_R + \vec{\Omega}\times\vec{r}$ を代入．

$$\vec{j}_S = \sigma\left(\vec{E}_S + \left(\vec{u}_R + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{B}\right) = \sigma\left(\underbrace{\vec{E}_S + \left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{B}}_{\vec{E}_R} + \vec{u}_R\times\vec{B}\right) = \sigma\left(\vec{E}_R + \vec{u}_R\times\vec{B}\right) = \vec{j}_R$$

これで，回転系での電場を，

$$\vec{E}_R = \vec{E}_S + \left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{B}$$

と与えれば，回転系におけるオームの法則は静止系と同様に表すことができる．
結局，以下の関係式が導かれる．

$$\vec{E}_S = \vec{E}_R - \left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{B}$$

３．ファラデーの法則

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_S=-\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_S$$

ここに，以下の関係式

$$\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_S=\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_R-\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{\nabla}\vec{B}+\vec{\Omega}\times\vec{B},\quad \vec{E}_S=\vec{E}_R-\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{B}$$

を代入する．

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_R-\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{B}\right)=-\left[\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_R-\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{\nabla}\vec{B}+\vec{\Omega}\times\vec{B}\right]$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_R-\underbrace{\vec{\nabla}\times\left[\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{B}\right]}_{*}=-\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_R+\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{\nabla}\vec{B}-\vec{\Omega}\times\vec{B}$$

左辺の第 2 項（赤字部分）は，次のベクトル演算公式から

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{u}\times\vec{w}\right)=\left(\vec{w}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}-\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{w}+\vec{u}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{w}\right)-\vec{w}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)$$

$$*=\underbrace{\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)}_{\vec{\Omega}\times\vec{B}}-\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{\nabla}\vec{B}+\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\underbrace{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)}_{0}-\vec{B}\left[\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)}_{0}\right]=\vec{\Omega}\times\vec{B}-\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{\nabla}\vec{B}$$

と変形できる．したがって，ファラデーの法則は

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_R=-\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_R$$

となり，回転系においてもファラデーの法則は変わらない．

４．アンペールの法則など

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_m\vec{j}$$

磁束密度も電流密度も座標系によらず変化しないので，アンペールの式はこのまま回転系でも成り立つ．**電荷保存則**も同様である．なお，本稿で触れなかった**ガウスの法則**から電荷密度が求められるが，電荷密度それ自身はMHD 方程式には影響を与えないので割愛した（これまでと同様に式展開することで，電荷密度は慣性系と回転系で異なることがわかる）．

５．誘導方程式（A－φ法）

オームの法則とアンペールの法則から電流密度を消去した次式を考える．

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\sigma\mu_m\left[\vec{E}_S+\vec{u}_S\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\right]$$

ベクトル演算公式およびポテンシャルを用いて，次式を得る．

$$\frac{1}{\sigma\mu_m}\left[\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}\right]=-\vec{\nabla}\varphi_S-\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_S+\vec{u}_S\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$$

さらに，クーロンゲージ$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$を導入すれば，以下の静止系の誘導方程式を得る．

$$\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_S=-\vec{\nabla}\varphi_S+\vec{u}_S\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)+\frac{1}{\sigma\mu_m}\nabla^2\vec{A}$$

ここに，先に得られた静止系と回転系の関係式を代入すれば，

$$\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_R-\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{\nabla}\vec{A}+\vec{\Omega}\times\vec{A}=-\vec{\nabla}\left(\varphi_R+\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{A}\right)+\left(\vec{u}_R+\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)+\frac{1}{\sigma\mu_m}\nabla^2\vec{A}$$

これを整理する

$$\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_R-\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{\nabla}\vec{A}+\vec{\Omega}\times\vec{A}=-\vec{\nabla}\varphi_R-\vec{\nabla}\left[\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{A}\right]+\vec{u}_R\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)+\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)+\frac{1}{\sigma\mu_m}\nabla^2\vec{A}$$

オームの法則の議論で述べたように青字部分は落ちるので，以下の回転系の式を得る．

$$\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_R=-\vec{\nabla}\varphi_R+\vec{u}_R\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)+\frac{1}{\sigma\mu_m}\nabla^2\vec{A}$$

６．誘導方程式（B 法）

オームの法則とアンペールの法則から電流密度を消去し次式を得る．

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\sigma\mu_m\left(\vec{E}_S+\vec{u}_S\times\vec{B}\right)$$

この式の両辺に対して回転をとる．ただし，ここでは導電率と透磁率は定数とする（導電率が相によって急変するような系を想定する場合には，B 法を使うことに注意を要する）．

$$\frac{1}{\sigma\mu_m}\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\times\vec{E}_S+\vec{\nabla}\times\left(\vec{u}_S\times\vec{B}\right)$$

ここに，ベクトル演算公式$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)-\nabla^2\vec{B}$とファラデーの法則を代入して，

$$\frac{1}{\sigma\mu_m}\left[\vec{\nabla}\underbrace{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)}_{0}-\nabla^2\vec{B}\right]=-\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_S+\vec{\nabla}\times\left(\vec{u}_S\times\vec{B}\right)$$

整理して，静止系の誘導方程式が得られる．

$$\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_S = \vec{\nabla}\times\left(\vec{u}_S \times \vec{B}\right) + \frac{1}{\sigma\mu_m}\nabla^2\vec{B}$$

ここに先に得られた関係式を代入する

$$\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_R - \left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{\nabla}\vec{B} + \vec{\Omega}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\times\left[\left(\vec{u}_R + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{B}\right] + \frac{1}{\sigma\mu_m}\nabla^2\vec{B}$$

これを整理する．

$$\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_R - \left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{\nabla}\vec{B} + \vec{\Omega}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{u}_R \times \vec{B}\right) + \vec{\nabla}\times\left[\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{B}\right] + \frac{1}{\sigma\mu_m}\nabla^2\vec{B}$$

ファラデーの法則における先の議論より，赤字部分は落ちる．したがって，回転系での誘導方程式は次式となる．

$$\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_R = \vec{\nabla}\times\left(\vec{u}_R \times \vec{B}\right) + \frac{1}{\sigma\mu_m}\nabla^2\vec{B}$$

以上より，回転系における**誘導方程式**（A－ϕ 法および B 法）は静止系と同様に表現される．

７．まとめ

以下に，時間変化，速度，スカラポテンシャル，電場の関係式をまとめる．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_S = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_R - \left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{\nabla} + \vec{\Omega}\times$$

$$\vec{u}_S = \vec{u}_R + \vec{\Omega}\times\vec{r}$$

$$\varphi_S = \varphi_R + \left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{A}$$

$$\vec{E}_S = \vec{E}_R - \left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{B}$$

あるいは，S と R を左辺と右辺で入れ替えて，以下のようにも書ける．

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_R = \left(\frac{D}{Dt}\right)_S - \vec{\Omega}\times$$

$$\vec{u}_R = \vec{u}_S - \vec{\Omega}\times\vec{r}$$

$$\varphi_R = \varphi_S - \vec{A}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)$$

$$\vec{E}_R = \vec{E}_S - \vec{B}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)$$