回転座標系における Navier-Stokes 方程式について

１．はじめに

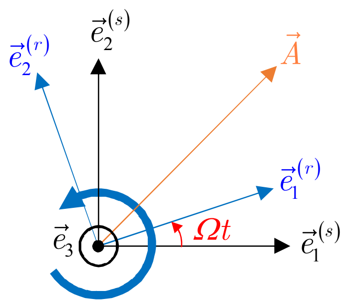
本稿では，地球流体力学などで必要となる，回転座標系における Navier-Stokes 方程式などの導出を試みる．デカルト座標系において，静止座標系および一定角速度で回転する動座標系の基本単位ベクトルを以下のように表す．

静止座標系　$\vec{e}_i^{(s)}$

回転座標系　$\vec{e}_i^{(r)}$

上付き添え字の(s)は stationary を，(r)は rotational を意味する．基本単位ベクトル$\vec{e}_i$の下付き添え字iは，軸の方向を表し，2 次元では$1, 2$をとり，3 次元では$1, 2, 3$をとる．系によらず基本ベクトルは互いに直交している．まず，位置ベクトル$\vec{x}$は，静止座標系，回転座標系の基底を用いて，それぞれ次式で与えられる．

$$\vec{x} = x_1^{(s)}\vec{e}_1^{(s)} + x_2^{(s)}\vec{e}_2^{(s)} + x_3^{(s)}\vec{e}_3^{(s)} = \sum_{i=1}^{3} x_i^{(s)}\vec{e}_i^{(s)} \tag{1}$$



$$\vec{x} = x_1^{(r)}\vec{e}_1^{(r)} + x_2^{(r)}\vec{e}_2^{(r)} + x_3^{(r)}\vec{e}_3^{(r)} = \sum_{i=1}^{3} x_i^{(r)}\vec{e}_i^{(r)} \tag{2}$$

次に，$\vec{e}_3$を回転軸とするような一定角速度Ωの回転を考える．静止座標系と回転座標系の基本ベクトルの間には以下の関係がある．

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1^{(r)} \\ \vec{e}_2^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) \\ -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1^{(s)} \\ \vec{e}_2^{(s)} \end{pmatrix} \tag{3}$$

任意のベクトル$\vec{A}$は，静止系，回転系での成分$A_i^{(s)}, A_i^{(r)}$およびそれらの基本ベクトルの線形和として以下のように表現できる．

$$\vec{A} = A_1^{(s)}\vec{e}_1^{(s)} + A_2^{(s)}\vec{e}_2^{(s)} = A_1^{(r)}\vec{e}_1^{(r)} + A_2^{(r)}\vec{e}_2^{(r)} \tag{4}$$

式(3)を式(4)に代入すれば，

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_1^{(s)}\vec{e}_1^{(s)} + A_2^{(s)}\vec{e}_2^{(s)} \\ &= \underbrace{\left[A_1^{(s)}\cos(\Omega t) + A_2^{(s)}\sin(\Omega t) \right]}_{A_1^{(r)}} \vec{e}_1^{(r)} + \underbrace{\left[-A_1^{(s)}\sin(\Omega t) + A_2^{(s)}\cos(\Omega t) \right]}_{A_2^{(r)}} \vec{e}_2^{(r)} \end{aligned} \tag{5}$$

これから，

$$A_1^{(r)} = A_1^{(s)}\cos(\Omega t) + A_2^{(s)}\sin(\Omega t), \quad A_2^{(r)} = -A_1^{(s)}\sin(\Omega t) + A_2^{(s)}\cos(\Omega t) \tag{6}$$

の関係式を得る．

２．基本ベクトルの偏微分係数

式(3)で与えられた $\vec{e}_1^{(r)} = \vec{e}_1^{(s)}\cos(\Omega t) + \vec{e}_2^{(s)}\sin(\Omega t)$ の両辺を時間tで微分すると

$$\frac{\partial \vec{e}_1^{(r)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{e}_1^{(s)}\cos(\Omega t) + \vec{e}_2^{(s)}\sin(\Omega t)\right] = -\vec{e}_1^{(s)}\Omega\sin(\Omega t) + \vec{e}_2^{(s)}\Omega\cos(\Omega t) = \Omega\vec{e}_2^{(r)}$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_1^{(r)}}{\partial t} = \Omega\vec{e}_2^{(r)}} \tag{7}$$

同様にして，$\vec{e}_2^{(r)} = -\vec{e}_1^{(s)}\sin(\Omega t) + \vec{e}_2^{(s)}\cos(\Omega t)$ を微分することにより

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_2^{(r)}}{\partial t} = -\Omega\vec{e}_1^{(r)}} \tag{8}$$

となる．式(7), (8)は重要である．回転系の基本ベクトルの時間変化には注意が必要である．後述するが，これらは回転座標系からみれば零であるが，静止座標系からみれば零ではない．

次に同様にして，時間を止めた状態で，基本ベクトルの空間微分を考える．その結果は以下のように与えられる．

$$\boxed{\frac{\partial \vec{e}_i^{(r)}}{\partial x_j^{(r)}} = \frac{\partial \vec{e}_i^{(r)}}{\partial x_j^{(s)}} = \frac{\partial \vec{e}_i^{(s)}}{\partial x_j^{(r)}} = \frac{\partial \vec{e}_i^{(s)}}{\partial x_j^{(s)}} = \vec{0}, \quad (i = 1, 2;\ j = 1, 2)} \tag{9}$$

式(9)から，基本ベクトルの空間微分は全てゼロベクトルとなる．したがって，ベクトルの空間微分は，その成分の微分だけを考えればよく，静止または回転といった座標系に依らない．

３．ベクトルの時間変化

任意のベクトル $\vec{A}(t)$ の時間微分について考える．回転系の基本ベクトルを使えば，以下のように表現される．

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial A_1^{(r)}}{\partial t}\vec{e}_1^{(r)} + \frac{\partial A_2^{(r)}}{\partial t}\vec{e}_2^{(r)} + A_1^{(r)}\frac{\partial \vec{e}_1^{(r)}}{\partial t} + A_2^{(r)}\frac{\partial \vec{e}_2^{(r)}}{\partial t} \tag{10}$$

ここで，動座標系の基本ベクトル $\vec{e}_i^{(r)}$ の時間変化は，観測系に依存する．回転系ではそれは零になるが，静止系では非零であることに注意が必要である．以下，$(\ )_R$，$(\ )_S$ はそれぞれ回転系，静止系から見たときの変化量を表すものとする．青字は，静止系の基底を使った場合の表現である．

$$\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)_R = \frac{\partial A_1^{(r)}}{\partial t}\vec{e}_1^{(r)} + \frac{\partial A_2^{(r)}}{\partial t}\vec{e}_2^{(r)} = \frac{\partial A_1^{(s)}}{\partial t}\vec{e}_1^{(s)} + \frac{\partial A_2^{(s)}}{\partial t}\vec{e}_2^{(s)} - \Omega\left(-A_2^{(s)}\vec{e}_1^{(s)} + A_1^{(s)}\vec{e}_2^{(s)}\right) \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)_S = \frac{\partial A_1^{(r)}}{\partial t}\vec{e}_1^{(r)} + \frac{\partial A_2^{(r)}}{\partial t}\vec{e}_2^{(r)} + A_1^{(r)}\underbrace{\frac{\partial \vec{e}_1^{(r)}}{\partial t}}_{\Omega\vec{e}_2^{(r)}} + A_2^{(r)}\underbrace{\frac{\partial \vec{e}_2^{(r)}}{\partial t}}_{-\Omega\vec{e}_1^{(r)}} = \frac{\partial A_1^{(s)}}{\partial t}\vec{e}_1^{(s)} + \frac{\partial A_2^{(s)}}{\partial t}\vec{e}_2^{(s)} \tag{12}$$

式(11)と式(12)から次式が得られる．

$$\underbrace{\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_S}_{\frac{\partial A_1^{(s)}}{\partial t}\vec{e}_1^{(s)}+\frac{\partial A_2^{(s)}}{\partial t}\vec{e}_2^{(s)}} = \underbrace{\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_R}_{\frac{\partial A_1^{(r)}}{\partial t}\vec{e}_1^{(r)}+\frac{\partial A_2^{(r)}}{\partial t}\vec{e}_2^{(r)}} + \Omega\left(-A_2^{(r)}\vec{e}_1^{(r)}+A_1^{(r)}\vec{e}_2^{(r)}\right) \tag{13}$$

ここで，式(13)の右辺第 2 項を調べるために，以下に $\vec{\Omega}\times\vec{A}$ の演算を行う．$\vec{\Omega}=\Omega\vec{e}_3^{(r)}$ であるから，

$$\vec{\Omega}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1^{(r)} & \vec{e}_2^{(r)} & \vec{e}_3^{(r)}\\ 0 & 0 & \Omega\\ A_1^{(r)} & A_2^{(r)} & 0\end{vmatrix}=\left(-\Omega A_2^{(r)}\right)\vec{e}_1^{(r)}+\left(\Omega A_1^{(r)}\right)\vec{e}_2^{(r)}=\Omega\left(-A_2^{(r)}\vec{e}_1^{(r)}+A_1^{(r)}\vec{e}_2^{(r)}\right) \tag{14}$$

この結果は，式(13)の右辺第 2 項に一致する．したがって，式(13)はこれを利用して，次のように表現できる．

$$\underbrace{\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_S}_{\frac{\partial A_i^{(s)}}{\partial t}\vec{e}_i^{(s)}} = \underbrace{\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_R}_{\frac{\partial A_i^{(r)}}{\partial t}\vec{e}_i^{(r)}} + \vec{\Omega}\times\vec{A} \tag{15}$$

今回は，説明の簡単化のために $\vec{e}_3$ 軸まわりの回転を考えたが，角速度ベクトル $\vec{\Omega}$ が 3 成分を持つような任意の回転の場合であっても，式(15)は成立すると思ってよい．ここまで，ベクトル $\vec{A}(t)$ の時間変化を扱ってきたが，流体力学で現れる場の関数（例えば，速度場）$\vec{u}(\vec{x},t)$ のときは，式(9)を考慮することにより，以下のように書ける．

$$\boxed{\left(\frac{D\vec{u}}{Dt}\right)_S=\left(\frac{D\vec{u}}{Dt}\right)_R+\vec{\Omega}\times\vec{u}} \tag{16}$$

式(15)と式(16)の違いは，時間での偏微分が実質微分（ラグランジュ微分）に置き換わっただけである．詳細は 5 節で述べる．

４．Navier-Stokes 方程式の慣性項

流体力学の運動を記述する Navier-Stokes 方程式の慣性項について考える．静止座標系における慣性項は，次式で与えられる．

$$\left(\frac{D\vec{u}_S}{Dt}\right)_S\equiv\left(\frac{\partial\vec{u}_S}{\partial t}\right)_S+\vec{u}_S\cdot\vec{\nabla}_S\vec{u}_S \tag{17}$$

式(16)に対して，位置ベクトル $\vec{x}$ を代入すると，次式を得る．

$$\boxed{\left(\frac{D\vec{x}}{Dt}\right)_S=\left(\frac{D\vec{x}}{Dt}\right)_R+\vec{\Omega}\times\vec{x}\quad\Rightarrow\quad\vec{u}_S=\vec{u}_R+\vec{\Omega}\times\vec{x}} \tag{18}$$

ここで，位置ベクトル $\vec{x}$ の実質微分は速度 $\vec{u}$ になることを用いた．速度ベクトルは，慣性系から見た場合

と回転系から見た場合で異なる．式(18)を利用して，回転系における慣性項がどのように表されるかを数式変形により調べる．式(16)において，$\vec{u}$ の代わりに $\vec{u}_S\left(\vec{x},t\right)$ を代入し，少し計算をすすめると

$$\left(\frac{D\vec{u}_S}{Dt}\right)_S=\left(\frac{D\vec{u}_S}{Dt}\right)_R+\vec{\Omega}\times\vec{u}_S$$

$$\left(\frac{\partial\vec{u}_S}{\partial t}\right)_S+\vec{u}_S\cdot\vec{\nabla}_S\vec{u}_S=\left(\frac{\partial\left(\vec{u}_R+\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)}{\partial t}\right)_R+\vec{u}_R\cdot\vec{\nabla}_R\left(\vec{u}_R+\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)+\vec{\Omega}\times\left(\vec{u}_R+\vec{\Omega}\times\vec{x}\right) \quad (19)$$

$$=\left(\frac{\partial\vec{u}_R}{\partial t}\right)_R+\vec{u}_R\cdot\vec{\nabla}_R\vec{u}_R+2\vec{\Omega}\times\vec{u}_R+\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)$$

上の式変形において，場の関数においては $\vec{x}$ と t は独立であることに注意が必要である（$\partial\vec{x}/\partial t=\vec{0}$）．また，$\vec{u}_R\cdot\vec{\nabla}_R\left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)=\vec{\Omega}\times\vec{u}_R$ を用いた．なお，実質微分のまま計算を実行しても同じ結果を得ることができる．まとめると，回転系における NS 方程式の慣性項は，次式の右辺のように表される．

$$\left(\frac{D\vec{u}_S}{Dt}\right)_S=\left(\frac{D\vec{u}_R}{Dt}\right)_R+2\vec{\Omega}\times\vec{u}_R+\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right) \quad (20)$$

式(20)の右辺第 2 項はコリオリ力，第 3 項は遠心力と呼ばれる．

５．実質微分

式(16)について補足説明する．$\vec{A}$ が速度ベクトルのような場の関数のとき，実質微分を考えることができる．式(9)に注意して表記すれば，次のように書ける．

$$d\vec{A}=\frac{\partial\left(A_i^{(r)}\vec{e}_i^{(r)}\right)}{\partial t}dt+\frac{\partial\left(A_i^{(r)}\vec{e}_i^{(r)}\right)}{\partial x_1^{(r)}}dx_1^{(r)}+\frac{\partial\left(A_i^{(r)}\vec{e}_i^{(r)}\right)}{\partial x_2^{(r)}}dx_2^{(r)}+\frac{\partial\left(A_i^{(r)}\vec{e}_i^{(r)}\right)}{\partial x_3^{(r)}}dx_3^{(r)}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{d\vec{A}}{dt}\equiv\frac{D\vec{A}}{Dt}=\frac{\partial\left(A_i^{(r)}\vec{e}_i^{(r)}\right)}{\partial t}+\underbrace{\frac{dx_j^{(r)}}{dt}}_{u_j^{(r)}}\frac{\partial\left(A_i^{(r)}\vec{e}_i^{(r)}\right)}{\partial x_j^{(r)}} \quad (21)$$

$$=\frac{\partial A_i^{(r)}}{\partial t}\vec{e}_i^{(r)}+u_j^{(r)}\frac{\partial A_i^{(r)}}{\partial x_j^{(r)}}\vec{e}_i^{(r)}+A_i^{(r)}\frac{\partial\vec{e}_i^{(r)}}{\partial t}+u_j^{(r)}A_i^{(r)}\underbrace{\frac{\partial\vec{e}_i^{(r)}}{\partial x_j^{(r)}}}_{\vec{0}}$$

この式を回転系と静止系のそれぞれから観る．回転系からは基本ベクトルの時間変化は見えないので，次式が成り立つ．

$$\left(\frac{D\vec{A}}{Dt}\right)_R=\frac{\partial A_i^{(r)}}{\partial t}\vec{e}_i^{(r)}+u_j^{(r)}\frac{\partial A_i^{(r)}}{\partial x_j^{(r)}}\vec{e}_i^{(r)} \quad (22)$$

他方，静止系から観れば，基本ベクトルの時間変化も含まれるから

$$\left(\frac{D\vec{A}}{Dt}\right)_S = \frac{\partial A_i^{(r)}}{\partial t}\vec{e}_i^{(r)} + u_j^{(r)}\frac{\partial A_i^{(r)}}{\partial x_j^{(r)}}\vec{e}_i^{(r)} + A_i^{(r)}\frac{\partial \vec{e}_i^{(r)}}{\partial t} = \frac{\partial A_i^{(s)}}{\partial t}\vec{e}_i^{(s)} + u_j^{(s)}\frac{\partial A_i^{(s)}}{\partial x_j^{(s)}}\vec{e}_i^{(s)} \tag{23}$$

式(22)と式(23)の差を取れば，

$$\left(\frac{D\vec{A}}{Dt}\right)_S = \left(\frac{D\vec{A}}{Dt}\right)_R + \underbrace{\vec{\Omega}\times\vec{A}}_{A_i^{(r)}\frac{\partial \vec{e}_i^{(r)}}{\partial t}}$$

$$\text{or}\quad \left(\frac{\partial A_i^{(s)}}{\partial t} + u_j^{(s)}\frac{\partial A_i^{(s)}}{\partial x_j^{(s)}}\right)_S = \left(\frac{\partial A_i^{(r)}}{\partial t} + u_j^{(r)}\frac{\partial A_i^{(r)}}{\partial x_j^{(r)}}\right)_R + \varepsilon_{ijk}\Omega_j A_k \tag{24}$$

式(24)の右辺第 2 項は，角速度ベクトル$\vec{\Omega}$が 3 成分を持つような任意の回転の場合であっても，$\vec{\Omega}\times\vec{A}$と与えられる．したがって，場のベクトル値関数に対して次式が成立する．

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_S = \left(\frac{D}{Dt}\right)_R + \vec{\Omega}\times \tag{25}$$

式(25)をスカラ値関数に対して用いるときは，右辺の第 2 項は落ちるとみなすことができる．式(25)に対して，$\vec{u}_S = \vec{u}_R + \vec{\Omega}\times\vec{x}$ を代入し計算を行う（$D\vec{x}/Dt = \vec{u}$ に注意する）．

$$\begin{aligned}\left(\frac{D\vec{u}_S}{Dt}\right)_S &= \left(\frac{D\vec{u}_S}{Dt}\right)_R + \vec{\Omega}\times\vec{u}_S \\ &= \left(\frac{D}{Dt}\left(\vec{u}_R + \vec{\Omega}\times\vec{x}\right)\right)_R + \vec{\Omega}\times\left(\vec{u}_R + \vec{\Omega}\times\vec{x}\right) = \left(\frac{D\vec{u}_R}{Dt} + \vec{\Omega}\times\frac{D\vec{x}}{Dt}\right)_R + \vec{\Omega}\times\vec{u}_R + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right) \\ &= \left(\frac{D\vec{u}_R}{Dt}\right)_R + 2\vec{\Omega}\times\vec{u}_R + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)\end{aligned} \tag{26}$$

この結果は，式(20)と同じであることがわかる．念のため示しておくと，式(26)におけるラグランジュ微分の定義は以下の通りである．

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_S \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_S = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_S + \vec{u}_S\cdot\vec{\nabla}_S,\qquad \left(\frac{D}{Dt}\right)_R \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_R = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_R + \vec{u}_R\cdot\vec{\nabla}_R \tag{27}$$

６．ナブラ演算子

この節では，2 次元の回転を考える．運動方程式や連続方程式が回転座標系でどのように表現されるかを知るために，ナブラ演算子の座標系変換を考える必要がある．静止系から眺めたナブラ演算子は，静止系の基底を用いて書き表されると考えられ，次式で与えられる．

$$\vec{\nabla}_S \equiv \vec{\nabla}^{(s)} = \vec{e}_1^{(s)}\frac{\partial}{\partial x_1^{(s)}} + \vec{e}_2^{(s)}\frac{\partial}{\partial x_2^{(s)}} \tag{28}$$

このナブラ演算子が回転系から眺めたときにどのように与えられるかを知るために，連鎖律（チェーン・ルール）を用いて，以下のように変形する．

$$\vec{\nabla}_S \equiv \vec{e}_1^{(s)}\left(\frac{\partial x_1^{(r)}}{\partial x_1^{(s)}}\frac{\partial}{\partial x_1^{(r)}}+\frac{\partial x_2^{(r)}}{\partial x_1^{(s)}}\frac{\partial}{\partial x_2^{(r)}}\right)+\vec{e}_2^{(s)}\left(\frac{\partial x_1^{(r)}}{\partial x_2^{(s)}}\frac{\partial}{\partial x_1^{(r)}}+\frac{\partial x_2^{(r)}}{\partial x_2^{(s)}}\frac{\partial}{\partial x_2^{(r)}}\right) \tag{29}$$

ここで，式(6)の関係と同様に，回転系と静止系の座標の間には以下の関係式が成り立つ．

$$x_1^{(r)} = x_1^{(s)}\cos(\Omega t)+x_2^{(s)}\sin(\Omega t),\quad x_2^{(r)} = -x_1^{(s)}\sin(\Omega t)+x_2^{(s)}\cos(\Omega t) \tag{30}$$

式(29)は，式(30)を利用して，以下のように書き改められる．

$$\vec{\nabla}_S = \vec{e}_1^{(s)}\left(\cos(\Omega t)\frac{\partial}{\partial x_1^{(r)}}-\sin(\Omega t)\frac{\partial}{\partial x_2^{(r)}}\right)+\vec{e}_2^{(s)}\left(\sin(\Omega t)\frac{\partial}{\partial x_1^{(r)}}+\cos(\Omega t)\frac{\partial}{\partial x_2^{(r)}}\right)$$

さらに，この式に対して，式(3)を変形した次式

$$\begin{aligned}\vec{e}_1^{(s)} &= \vec{e}_1^{(r)}\cos(\Omega t)-\vec{e}_2^{(r)}\sin(\Omega t)\\ \vec{e}_2^{(s)} &= \vec{e}_1^{(r)}\sin(\Omega t)+\vec{e}_2^{(r)}\cos(\Omega t)\end{aligned} \tag{31}$$

を代入し，回転系の基底に変換することを試みる．

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_S &= \left[\vec{e}_1^{(r)}\cos(\Omega t)-\vec{e}_2^{(r)}\sin(\Omega t)\right]\left(\cos(\Omega t)\frac{\partial}{\partial x_1^{(r)}}-\sin(\Omega t)\frac{\partial}{\partial x_2^{(r)}}\right)\\ &\quad+\left[\vec{e}_1^{(r)}\sin(\Omega t)+\vec{e}_2^{(r)}\cos(\Omega t)\right]\left(\sin(\Omega t)\frac{\partial}{\partial x_1^{(r)}}+\cos(\Omega t)\frac{\partial}{\partial x_2^{(r)}}\right)\\ &= \vec{e}_1^{(r)}\frac{\partial}{\partial x_1^{(r)}}+\vec{e}_2^{(r)}\frac{\partial}{\partial x_2^{(r)}} = \vec{\nabla}^{(r)} = \vec{\nabla}_R\end{aligned} \tag{32}$$

以上より，2 次元回転の場合には，ナブラ演算子は座標系に依らないことが確認された．3 次元回転の場合もこれが成り立つとみなすことにする．ナブラ演算子は，和の記号を用いて表せば

$$\vec{\nabla} \equiv \sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i^{(s)}\frac{\partial}{\partial x_i^{(s)}} = \sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i^{(r)}\frac{\partial}{\partial x_i^{(r)}} \tag{33}$$

となる．同様にラプラシアンは，

$$\nabla^2 \equiv \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^{(s)}\partial x_i^{(s)}} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^{(r)}\partial x_i^{(r)}} \tag{34}$$

となる．

７．質量保存式

続いて，以下に示される慣性系における質量保存式が回転系でどのように与えられるかを考える．

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_S + \vec{u}_S\cdot\vec{\nabla}_S\rho = -\rho\vec{\nabla}_S\cdot\vec{u}_S \tag{35}$$

ここに，まず式(18)を代入する．

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_S + \left(\vec{u}_R+\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)\cdot\vec{\nabla}_S\rho = -\rho\vec{\nabla}_S\cdot\left(\vec{u}_R+\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)$$

ナブラ演算子は系に依らないから，$\vec{\nabla}_R$ で置き換えられる．

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_S + \left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)\cdot\vec{\nabla}_R\rho}_{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_R} + \vec{u}_R\cdot\vec{\nabla}_R\rho = -\rho\vec{\nabla}_R\cdot\vec{u}_R - \rho\underbrace{\vec{\nabla}_R\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)}_{0}$$

ここで，左辺の第１項と２項は両項をまとめて回転系における時間変化と考えられる．また，右辺の第２項は零になる．したがって，回転系における質量保存式は

$$\boxed{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_R + \vec{u}_R\cdot\vec{\nabla}_R\rho = -\rho\vec{\nabla}_R\cdot\vec{u}_R} \tag{36}$$

と与えられる．これは，式(35)と同形となる．式(25)を利用して式変形を行っても式(36)を得ることができる．

ところで，スカラ値関数の回転系での時間変化については，式(36)を得る際にも言及したが，

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_R \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_S + \left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)\cdot\vec{\nabla}_R} \tag{37}$$

と表される．これを別の視点から導出することを試みる．２次元の回転の場合について，連鎖律を用いれば，次式を得る．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_S = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_R + \frac{\partial x_1^{(r)}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_1^{(r)}} + \frac{\partial x_2^{(r)}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_2^{(r)}} \tag{38}$$

ここで，式(30)を時間で微分して，

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1^{(r)}}{\partial t} &= -x_1^{(s)}\Omega\sin\left(\Omega t\right) + x_2^{(s)}\Omega\cos\left(\Omega t\right) = \Omega x_2^{(r)} \\ \frac{\partial x_2^{(r)}}{\partial t} &= -x_1^{(s)}\Omega\cos\left(\Omega t\right) - x_2^{(s)}\Omega\sin\left(\Omega t\right) = -\Omega x_1^{(r)}\end{aligned} \tag{39}$$

式(39)を式(38)に代入すると，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_R = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_S - \Omega\left(x_2^{(r)}\frac{\partial}{\partial x_1^{(r)}} - x_1^{(r)}\frac{\partial}{\partial x_2^{(r)}}\right) \tag{40}$$

を得る．式(37)の右辺第２項は，２次元回転の時に，

$$\left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)\cdot\vec{\nabla}_R = \begin{vmatrix}\vec{e}_1^{(r)} & \vec{e}_2^{(r)} & \vec{e}_3^{(r)} \\ 0 & 0 & \Omega \\ x_1^{(r)} & x_2^{(r)} & x_3^{(r)}\end{vmatrix}\cdot\vec{\nabla}_R = -\Omega\left(x_2^{(r)}\frac{\partial}{\partial x_1^{(r)}} - x_1^{(r)}\frac{\partial}{\partial x_2^{(r)}}\right) \tag{41}$$

となるので，式(40)をより一般的に書き表したものが式(37)ということになる．この式(37)は式(25)と似ているので，少し補足説明する．式(25)にスカラ値関数（例えば温度 T）が作用すると考えると，

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_S + \vec{u}_S\cdot\vec{\nabla}_S T = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_R + \vec{u}_R\cdot\vec{\nabla}_R T \tag{42}$$

これに対して，式(18)を用いて少し変形する．ナブラには座標系による違いはないので，

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_R = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_S + \left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)\cdot\vec{\nabla}T \tag{43}$$

となり，これは式(37)と等価である．したがって，スカラ場に対しては，右辺第 2 項を無視した式(25)と式(37)は等価であるが，ベクトル場$\vec{u}$に対しては，それらの式の間には$\vec{\Omega}\times\vec{u}$（式(25)の右辺第 2 項）だけ差があることには注意が必要である．静止系の運動方程式（ベクトル方程式）に対して，式(18)を代入するだけでは，それが回転系の運動方程式にきちんと変換されないのは，このような事情による．

８．渦度輸送方程式

渦度は，速度の回転で与えられる．静止系では，

$$\vec{\omega}_S \equiv \vec{\nabla}_S \times \vec{u}_S \tag{44}$$

ここに，式(18)を代入すると，

$$\vec{\omega}_S = \vec{\nabla}_S \times\left(\vec{u}_R + \vec{\Omega}\times\vec{x}\right) = \vec{\nabla}_S\times\vec{u}_R + \vec{\nabla}_S\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)$$

この第 2 項は，以下のように変形することができる．

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_S\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right) &= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varepsilon_{klm}\Omega_l x_m\right) = \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)\Omega_l\frac{\partial x_m}{\partial x_j} \\ &= \Omega_i\frac{\partial x_j}{\partial x_j} - \Omega_j\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \Omega_i\underbrace{\delta_{jj}}_{3} - \Omega_j\delta_{ij} = 3\Omega_i - \Omega_i = 2\vec{\Omega}\end{aligned} \tag{45}$$

したがって，静止系と回転系の渦度の関係は次式で与えられる．

$$\vec{\omega}_S = \vec{\omega}_R + 2\vec{\Omega} \tag{46}$$

静止系における非圧縮の渦度方程式は

$$\left(\frac{\partial\vec{\omega}_S}{\partial t}\right)_S + \left(\vec{u}_S\cdot\vec{\nabla}_S\right)\vec{\omega}_S = \left(\vec{\omega}_S\cdot\vec{\nabla}_S\right)\vec{u}_S + \nu\nabla_S^2\vec{\omega}_S \tag{47}$$

で与えられる．左辺に対して，式(25)および式(46)を適用すれば，

$$\begin{aligned}\left(\frac{D\vec{\omega}_S}{Dt}\right)_S &\equiv \left(\frac{\partial\vec{\omega}_S}{\partial t}\right)_S + \left(\vec{u}_S\cdot\vec{\nabla}_S\right)\vec{\omega}_S = \left(\frac{\partial\vec{\omega}_S}{\partial t}\right)_R + \left(\vec{u}_R\cdot\vec{\nabla}_R\right)\vec{\omega}_S + \vec{\Omega}\times\vec{\omega}_S \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\omega}_R + 2\vec{\Omega}\right)\right)_R + \left(\vec{u}_R\cdot\vec{\nabla}_R\right)\left(\vec{\omega}_R + 2\vec{\Omega}\right) + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\omega}_R + 2\vec{\Omega}\right) \\ &= \left(\frac{\partial\vec{\omega}_R}{\partial t}\right)_R + \left(\vec{u}_R\cdot\vec{\nabla}_R\right)\vec{\omega}_R + \vec{\Omega}\times\vec{\omega}_R\end{aligned}$$

一方，右辺には，式(18)を代入し

$$\left[\left(\vec{\omega}_R + 2\vec{\Omega}\right)\cdot\vec{\nabla}_S\right]\vec{u}_R + \left[\left(\vec{\omega}_R + 2\vec{\Omega}\right)\cdot\vec{\nabla}_S\right]\left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right) + \nu\nabla_S^2\left(\vec{\omega}_R + 2\vec{\Omega}\right)$$

この第 2 項目は，以下のように簡単化される．

$$\left[\left(\vec{\omega}_R+2\vec{\Omega}\right)\cdot\vec{\nabla}_R\right]\left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)=\left(\omega_i+2\Omega_i\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_{jkl}\Omega_k x_l\right)=\varepsilon_{jkl}\left(\omega_i+2\Omega_i\right)\Omega_k\frac{\partial x_l}{\partial x_i}$$

$$=\varepsilon_{jkl}\left(\omega_i+2\Omega_i\right)\Omega_k\delta_{il}=\varepsilon_{jki}\Omega_k\left(\omega_i+2\Omega_i\right)=\vec{\Omega}\times\left(\vec{\omega}_R+2\vec{\Omega}\right)=\vec{\Omega}\times\vec{\omega}_R$$

したがって，回転系における渦度輸送方程式は，

$$\left(\frac{\partial\vec{\omega}_R}{\partial t}\right)_R+\vec{u}_R\cdot\vec{\nabla}_R\vec{\omega}_R=\left(\vec{\omega}_R+2\vec{\Omega}\right)\cdot\vec{\nabla}_R\vec{u}_R+\nu\nabla_R^2\vec{\omega}_R \tag{48}$$

となる．

この結果を運動方程式の rot を取ることにより確かめる．式(20)の結果から，回転系の運動方程式（外力はなく，密度は一定とする）は次式で与えられる．以下，ナブラ演算子に添え字は付けない．

$$\left(\frac{D\vec{u}_R}{Dt}\right)_R+2\vec{\Omega}\times\vec{u}_R+\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)=-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p+\nu\nabla^2\vec{u}_R \tag{49}$$

この式の両辺に対して，rot を作用させるために，式(49)を次式のように変形する．

$$\frac{\partial\vec{u}_R}{\partial t}+\underbrace{\left(\vec{u}_R\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}_R}_{\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\left|\vec{u}_R\right|^2\right)+\vec{\omega}_R\times\vec{u}_R}+2\vec{\Omega}\times\vec{u}_R+\underbrace{\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)}_{-\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\left|\vec{\Omega}\times\vec{x}\right|^2\right)}=-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p+\nu\nabla^2\vec{u}_R$$

左辺第 4 項の遠心力項の式変形は，以下による．

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\left|\vec{\Omega}\times\vec{x}\right|^2\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\left(\varepsilon_{ijk}\Omega_j x_k\right)\left(\varepsilon_{ilm}\Omega_l x_m\right)\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}\Omega_j x_k\Omega_l x_m\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\left(\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl}\right)\Omega_j x_k\Omega_l x_m\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\Omega_l x_m\Omega_l x_m-\Omega_m x_k\Omega_k x_m\right)$$

$$=\Omega_l\Omega_l x_m\frac{\partial x_m}{\partial x_n}-\frac{\Omega_m\Omega_k}{2}\frac{\partial}{\partial x_n}\left(x_m x_k\right)=\Omega_l\Omega_l x_m\frac{\partial x_m}{\partial x_n}-\frac{\Omega_m\Omega_k}{2}\left(x_m\frac{\partial x_k}{\partial x_n}+\frac{\partial x_m}{\partial x_n}x_k\right) \tag{50}$$

$$=\Omega_l\Omega_l x_n-\frac{\Omega_m\Omega_k}{2}\left(x_m\delta_{nk}+\delta_{mn}x_k\right)=\Omega_l\Omega_l x_n-\left(\frac{\Omega_m\Omega_n}{2}x_m+\frac{\Omega_n\Omega_k}{2}x_k\right)=\Omega^2\vec{x}-\left(\vec{\Omega}\cdot\vec{x}\right)\vec{\Omega}$$

$$\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)=\varepsilon_{ijk}\Omega_j\left(\varepsilon_{klm}\Omega_l x_m\right)=\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\Omega_j\Omega_l x_m=\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)\Omega_j\Omega_l x_m$$

$$=\Omega_j\Omega_i x_j-\Omega_j\Omega_j x_i=\left(\vec{\Omega}\cdot\vec{x}\right)\vec{\Omega}-\Omega^2\vec{x}$$

結局，運動方程式は以下のように変形できる．

$$\left(\frac{\partial\vec{u}_R}{\partial t}\right)_R=-\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}-\frac{1}{2}\left|\vec{\Omega}\times\vec{x}\right|^2+\frac{1}{2}\left|\vec{u}_R\right|^2\right)+\vec{u}_R\times\left(\vec{\omega}_R+2\vec{\Omega}\right)+\nu\nabla^2\vec{u}_R \tag{51}$$

最後に，この式の rot を取るが，右辺第 2 項は，以下のように変形できる．

$$\vec{\nabla}\times\left[\vec{u}_R\times\left(\vec{\omega}_R+2\vec{\Omega}\right)\right]=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\varepsilon_{klm}u_l\left(\omega+2\Omega\right)_m\right]$$

$$=\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left[u_l\left(\omega+2\Omega\right)_m\right]=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[u_i\left(\omega+2\Omega\right)_j\right]-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[u_j\left(\omega+2\Omega\right)_i\right]$$

$$=\left(\omega+2\Omega\right)_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+u_i\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\omega+2\Omega\right)_j}_{0\left(\because\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)=0\right)}-\underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{0}\left(\omega+2\Omega\right)_i-u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\omega+2\Omega\right)_i$$

$$=\left(\vec{\omega}_R+2\vec{\Omega}\right)\cdot\vec{\nabla}\vec{u}_R-\vec{u}_R\cdot\vec{\nabla}\vec{\omega}_R \tag{52}$$

この 3 行目で，ベクトルの恒等式と非圧縮条件を適用した．したがって，渦度方程式は

$$\left(\frac{\partial\vec{\omega}_R}{\partial t}\right)_R+\vec{u}_R\cdot\vec{\nabla}\vec{\omega}_R=\left(\vec{\omega}_R+2\vec{\Omega}\right)\cdot\vec{\nabla}\vec{u}_R+\nu\nabla^2\vec{\omega}_R$$

となり，式(48)に一致する．ちなみに，非圧縮性流れを仮定しない場合の回転系の渦度方程式は，式(52)の計算過程は省かれ，次式で与えられる．

$$\left(\frac{\partial\vec{\omega}_R}{\partial t}\right)_R=\vec{\nabla}\times\left[\vec{u}_R\times\left(\vec{\omega}_R+2\vec{\Omega}\right)\right]+\nu\nabla^2\vec{\omega}_R \tag{53}$$

９．回転座標系における支配方程式のまとめ

以下には，本稿で考察した３つの方程式をまとめる．青字部分は慣性系の方程式からの違いである．

＜質量保存式＞

$$\left(\frac{D\rho}{Dt}\right)_R=-\rho\vec{\nabla}_R\cdot\vec{u}_R \tag{54}$$

特に，非圧縮流れでは左辺が零であるから，より簡単に

$$\vec{\nabla}_R\cdot\vec{u}_R=0 \tag{55}$$

となる．

＜Navier-Stokes の運動方程式＞

$$\left(\frac{D\vec{u}_R}{Dt}\right)_R+2\vec{\Omega}\times\vec{u}_R+\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)=-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}_Rp+\nu\nabla_R^2\vec{u}_R$$
$$\text{or}\quad\left(\frac{\partial\vec{u}_R}{\partial t}\right)_R+\left(\vec{\omega}_R+2\vec{\Omega}\right)\times\vec{u}_R=-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}_Rp-\vec{\nabla}_R\left(\frac{1}{2}\left|\vec{u}_R\right|^2-\frac{1}{2}\left|\vec{\Omega}\times\vec{x}\right|^2\right)+\nu\nabla_R^2\vec{u}_R \tag{56}$$

外力項があるときは，それを右辺に加える必要がある．

＜渦度輸送方程式＞

$$\left(\frac{D\vec{\omega}_R}{Dt}\right)_R = \left(\vec{\omega}_R + 2\vec{\Omega}\right)\cdot\vec{\nabla}_R\vec{u}_R + \nu\nabla_R^2\vec{\omega}_R \quad \left(\text{if } \vec{\nabla}_R\cdot\vec{u}_R = 0\right)$$
$$\text{or} \quad \left(\frac{\partial\vec{\omega}_R}{\partial t}\right)_R = \vec{\nabla}_R\times\left[\vec{u}_R\times\left(\vec{\omega}_R + 2\vec{\Omega}\right)\right] + \nu\nabla_R^2\vec{\omega}_R \tag{57}$$

密度一定としたときに得られる方程式である.

実際の運用時には，式(54)～(57)に含まれる下付き添え字 R を意識せずに計算を行えばよい.