レイノルズの相似則と無次元化

非圧縮性流れの基礎式

先ずは，流体が単相で密度や粘度の変化がなく一定で，保存力場にさらされるような状況において，非圧縮性の Navier-Stokes 方程式の相似則を考える（ここでは密度は一定とする）．運動方程式と連続の式は，それぞれ次式で与えられる．

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{u} \tag{1-1}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0 \tag{1-2}$$

ここで，ナブラ演算子およびラプラス演算子は以下のように定義される．

$$\vec{\nabla}\equiv\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}=\vec{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\vec{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\vec{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}=\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1-3}$$

$$\nabla^2=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_j}\Rightarrow\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_j} \tag{1-4}$$

流体に働く力は，慣性力，圧力勾配による力，粘性力の 3 つである．例えば，一様流 u_∞ の中に置かれた物体（空間に固定され，代表長さを d とする）を過ぎる流れを考えると，物体の表面では速度がゼロであるので, 物体の側面近傍では速度差をならすために粘性力が大きくなり，また物体前方のよどみ点では圧力が大きくなる．このように流れ場の場所場所に応じて，慣性力, 粘性力, 圧力による力のバランスは異なる. 一方, 慣性力や粘性力の大きさは，流速，密度，粘度，代表長さに依存するであろうことは，式(1-1)から判断できる．流体の運動を論じる際，これらの要因を個別に調べ上げることは容易ではない．したがって，式(1-1)に対して，式(1-5)の無次元変数の定義により，無次元化を試みる．

$$\tau=\frac{t}{d/u_\infty},\quad \vec{X}=\frac{\vec{x}}{d},\quad \vec{U}=\frac{\vec{u}}{u_\infty},\quad P=\frac{p}{\rho u_\infty^2},\quad \vec{\nabla}_\bullet=\frac{\vec{\nabla}}{d^{-1}},\quad {\nabla_\bullet}^2=\frac{\nabla^2}{d^{-2}} \tag{1-5}$$

それぞれ運動方程式と連続の式は無次元化されて

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau}+\left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}_\bullet\right)\vec{U}=-\vec{\nabla}_\bullet P+\frac{1}{Re}{\nabla_\bullet}^2\vec{U} \tag{1-6}$$

$$\vec{\nabla}_\bullet\cdot\vec{U}=0 \tag{1-7}$$

となる．無次元のナブラ演算子には，有次元のそれと区別するために，下付き・を付けている（一般には付けない）．ここで，Re はレイノルズ数 (Reynolds number) と呼ばれ，

$$Re=\frac{\rho u_\infty d}{\mu}=\frac{u_\infty d}{\nu} \tag{1-8}$$

と定義される無次元数であり，慣性力と粘性力の比を表す．式(1-8)を見れば，無次元化されたことで，流速，密度，粘度，代表長さといった諸要因は，一括りに Re だけになったことがわかる．これで，Re だけを変化させると流れもその値に応じて変化することが容易に想像される．その場合，式(1-5)で定義される Re の値が同じでさえあれば，流体の種類や流速を変えた

としても，流れが力学的に相似であることを意味する．もちろん，境界条件が同じであり，物体が幾何学的に相似であることが前提である．このことをレイノルズの相似則と云い，大きなスケールの現象を，風洞を用いた小さなスケールの模型実験により推定するのに用いられる．これは静止流体中を物体が移動する場合と，静止物体周りを一様流が流れている場合とでは，相対速度が同じであれば，現象も同じであるという前提に立っている．図 1 は CFD 解析の一例である．

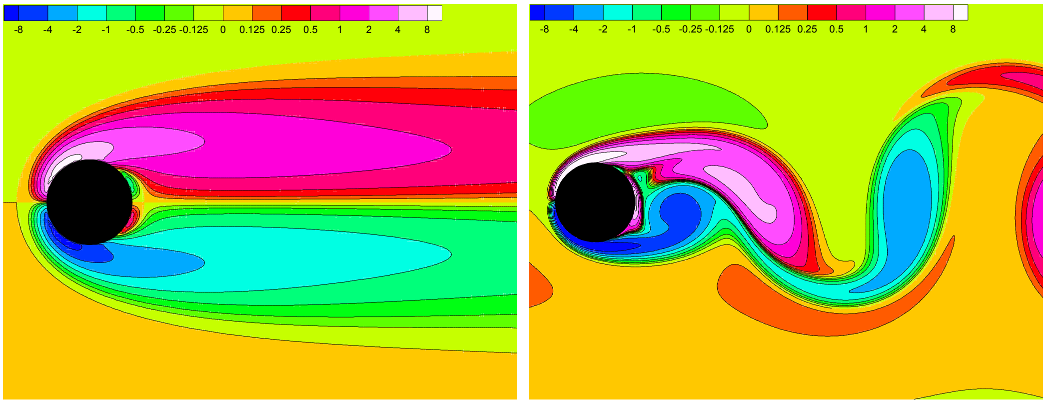

図 1　円柱の後方にできる渦の違い（左 $Re = 40$; 右 $Re = 200$）（渦度を表示，CFD 解析による）

一般に，レイノルズ数の小さな流れでは，流れの広い範囲にわたって粘性の影響を考慮しなければならない．レイノルズ数の大きな流れでは，粘性による影響は物体近傍に限られ，流れの大部分で粘性の影響は無視できる．注意点として，物体が流れの影響によって振動したり移動したりするような場合には，単相流としてではなく，二相流としての取り扱いが必要であるので，この節に記したレイノルズ数だけでは不十分で，他にも幾つかの無次元数が現れる．また，時間スケールの代表値があるような周期的な運動を論じる場合には，ストローハル数という無次元数も追加で現れる．さらに，流速が音速に近い場合の現象は，マッハ数という無次元数が重要になる．それについては無次元化の仕方をふまえながら次節で示す．

<u>無次元化の仕方</u>

今度は，密度変化をふまえて Navier-Stokes の運動方程式を例にとり無次元化する．元になる有次元の方程式は，以下の通りとする．

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}\right]=-\vec{\nabla}p+\mu\left[\nabla^2\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)\right] \tag{2-1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\rho=-\rho\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) \tag{2-2}$$

$$\rho c_p\left[\frac{\partial T}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)T\right]=k\nabla^2T+\frac{Dp}{Dt}+\mu\phi_D \tag{2-3}$$

想定する問題としては，流速 u_∞ の一様流中に置かれた直径 d の円柱まわりの流れを考える．無限遠方における圧力，密度，および温度をそれぞれ p_∞，ρ_∞，T_∞ とする．ここでは粘性係数

μ，熱伝導率k，比熱c_p, c_vなどの物性値は一定値と見なす．運動方程式の外力項は含まれない．無次元化するにあたり，まず機械的に，以下のように無次元変数を置く．

$$\tau = \frac{t}{t_0},\quad \vec{X} = \frac{\vec{x}}{d},\quad \vec{U} = \frac{\vec{u}}{u_\infty},\quad P = \frac{p}{p_\infty},\quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty},\quad \Theta = \frac{T}{T_\infty},$$
$$\vec{\nabla}_\bullet = \frac{\vec{\nabla}}{d^{-1}},\quad \nabla_\bullet{}^2 = \frac{\nabla^2}{d^{-2}} \tag{2-4}$$

ここで，右辺の分子は有次元変数であり同じ次元を持つ分母の参照量で割ることにより，左辺は無次元変数となる．分母の参照量のうち，下付き添え字 0 のついたt_0（時間の次元を持つ）については，現段階では未定参照量としておく．式(2-4)を式(2-1)に代入すると，

$$\rho_\infty \bar{\rho}\left[\frac{u_\infty}{t_0}\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + \frac{u_\infty{}^2}{d}\left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}_\bullet\right)\vec{U}\right] = -\frac{p_\infty}{d}\vec{\nabla}_\bullet P + \mu\frac{u_\infty}{d^2}\left[\nabla_\bullet{}^2\vec{U} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}_\bullet\left(\vec{\nabla}_\bullet\cdot\vec{U}\right)\right]$$

両辺に$\dfrac{d}{\rho_\infty u_\infty{}^2}$を掛けて，整理する．

$$\bar{\rho}\left[\left(\frac{d}{t_0 u_\infty}\right)\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + \left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}_\bullet\right)\vec{U}\right] = -\left(\frac{p_\infty}{\rho_\infty u_\infty{}^2}\right)\vec{\nabla}_\bullet P + \left(\frac{\mu}{\rho_\infty u_\infty d}\right)\left[\nabla_\bullet{}^2\vec{U} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}_\bullet\left(\vec{\nabla}_\bullet\cdot\vec{U}\right)\right] \tag{2-5}$$

括弧（）で括られたそれぞれ 3 つのグループは無次元である．ここで，$d/\left(t_0 u_\infty\right) = 1$とおくことにより，時間の参照量が$t_0 = d/u_\infty$と定まる．ところで，等エントロピー状態の音速は，比熱比$\gamma = c_p/c_v$（ここでは定数とみなす）を用いて，次の通り示される．

$$c_S \equiv \sqrt{\frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty}} \tag{2-6}$$

これより，式(2-5)は書き換えられ，結局，次式のように無次元化される．

$$\bar{\rho}\left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + \left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}_\bullet\right)\vec{U}\right] = -\frac{1}{\gamma Ma^2}\vec{\nabla}_\bullet P + \frac{1}{Re}\left[\nabla_\bullet{}^2\vec{U} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}_\bullet\left(\vec{\nabla}_\bullet\cdot\vec{U}\right)\right] \tag{2-7}$$

ここで，$Ma = u_\infty/c_S$はマッハ数（Mach number）と呼ばれる．その自乗値は，およそ動圧と静圧の比（あるいは慣性力と圧力勾配による力の比）になる．

次に，エネルギー式を無次元化する．式(2-4)を式(2-3)に代入すると，

$$\rho_\infty \bar{\rho} c_p\left(\frac{T_\infty}{t_0}\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{u_\infty T_\infty}{d}\left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}_\bullet\right)\Theta\right) = \frac{kT_\infty}{d^2}\nabla_\bullet{}^2\Theta + \frac{p_\infty}{t_0}\frac{\partial P}{\partial \tau} + \frac{u_\infty p_\infty}{d}\left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}_\bullet\right)P + \mu\frac{u_\infty{}^2}{d^2}\Phi_D$$

先の結果を使って，整理すると，

$$\overline{\rho}\left[\frac{\partial \Theta}{\partial \tau}+\left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}_{\bullet}\right)\Theta\right]=\left(\frac{k}{\rho_\infty c_p u_\infty d}\right)\nabla_{\bullet}^{2}\Theta+\left(\frac{p_\infty}{\rho_\infty c_p T_\infty}\right)\frac{D_{\bullet}P}{D\tau}+\left(\frac{\mu u_\infty}{\rho_\infty c_p T_\infty d}\right)\varPhi_D$$

括弧の中のそれぞれを無次元数が現れるようにすると，

$$\frac{k}{\rho_\infty c_p u_\infty d}=\frac{\mu}{\rho_\infty u_\infty d}\frac{k}{\mu c_p}=\frac{1}{RePr}$$

$$\frac{p_\infty}{\rho_\infty c_p T_\infty}=\frac{p_\infty}{\rho_\infty c_p}\frac{\rho_\infty R}{p_\infty}=\frac{\gamma-1}{\gamma}$$

$$\frac{\mu u_0}{\rho c_p T_\infty d}=\frac{\mu}{\rho u_0 d}\frac{u_\infty{}^2}{c_p T_\infty}=\frac{1}{Re}\frac{u_\infty{}^2}{c_p T_\infty}=\frac{1}{Re}\frac{u_\infty{}^2}{c_p}\frac{\rho_\infty R}{p_\infty}=\frac{1}{Re}\frac{R}{c_p}\gamma Ma^2=\left(\gamma-1\right)\frac{Ma^2}{Re}$$

結局，エネルギー式は無次元化されて次式となる．

$$\overline{\rho}\left[\frac{\partial \Theta}{\partial \tau}+\left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}_{\bullet}\right)\Theta\right]=\frac{1}{RePr}\nabla_{\bullet}^{2}\Theta+\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{D_{\bullet}P}{D\tau}+\left(\gamma-1\right)\frac{Ma^2}{Re}\varPhi_D \tag{2-8}$$

無次元変数と無次元数をまとめると以下の通りとなる．

$$\begin{gathered}\tau=\frac{t}{d/u_\infty},\quad \vec{X}=\frac{\vec{x}}{d},\quad \vec{U}=\frac{\vec{u}\left(t,\vec{x}\right)}{u_\infty},\quad P=\frac{p\left(t,\vec{x}\right)}{p_\infty},\quad \Theta=\frac{T\left(t,\vec{x}\right)}{T_\infty},\\ \overline{\rho}=\frac{\rho\left(t,\vec{x}\right)}{\rho_\infty},\quad Re=\frac{\rho_\infty u_\infty d}{\mu},\quad Ma=\frac{u_\infty}{c_S},\quad \gamma=\frac{c_p}{c_p-R},\quad Pr=\frac{c_p\mu}{k}\end{gathered} \tag{2-9}$$

マッハ数が 1 よりも十分に小さいときには，密度は大きくは変化しない．式(2-7)において，$\overline{\rho}=\rho/\rho_\infty=1$ と見なすことができ，さらに γMa^2 は定数なので，これをナブラ演算子の中に入れても，式の意味は変わらない．したがって

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau}+\left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}_{\bullet}\right)\vec{U}=-\vec{\nabla}_{\bullet}\left(\frac{P}{\gamma Ma^2}\right)+\frac{1}{Re}\left[\nabla_{\bullet}^{2}\vec{U}+\frac{1}{3}\vec{\nabla}_{\bullet}\left(\vec{\nabla}_{\bullet}\cdot\vec{U}\right)\right]$$

この式において，右辺第一項の括弧の中を展開し，

$$\frac{P}{\gamma Ma^2}=\frac{p}{p_\infty}\frac{c_S{}^2}{\gamma u_\infty{}^2}=\frac{p}{p_\infty}\frac{1}{\gamma u_\infty{}^2}\frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty}=\frac{p}{\rho_\infty u_\infty{}^2}=P'=\frac{p}{p_0}$$

とおけば，これは圧力の参照量 p_0 を $\rho_\infty u_\infty{}^2$ と置いたことに相当する．結局，低マッハ数で密度変化が無視できる，いわゆる非圧縮性流れのとき，式(2-7)は次式で代用できる．

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau}+\left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}_{\bullet}\right)\vec{U}=-\vec{\nabla}_{\bullet}P'+\frac{1}{Re}\left[\nabla_{\bullet}^{2}\vec{U}+\frac{1}{3}\vec{\nabla}_{\bullet}\left(\vec{\nabla}_{\bullet}\cdot\vec{U}\right)\right] \tag{2-10}$$

これは粘性項を除いて式(1-6)に同じである. 式(2-8)の無次元圧力は次のように置き換えられる.

$$P\left(\tau,\vec{X}\right)=\frac{p\left(t,\vec{x}\right)}{p_\infty} \quad \Rightarrow \quad P'\left(\tau,\vec{X}\right)=\frac{p\left(t,\vec{x}\right)}{\rho_\infty {u_\infty}^2} \tag{2-11}$$

このようにマッハ数の非常に小さな流れ，いわゆる非圧縮性流れでは，圧力の参照量を p_∞ ではなく $\rho_\infty {u_\infty}^2$ とすることで，マッハ数や比熱比を考慮しなくて済む．また p_∞ が必要ないことから，圧力の絶対値は無関係であることも理解できる．運動方程式には，慣性項，粘性項，圧力項の 3 項があるが，非圧縮性流れでは，圧力項と他の 2 項との比によって作られる無次元数が現れないのはこのような事情によると考えられ，現れる無次元数はレイノルズ数だけとなる．

ところで，質量保存式(2-2)は無次元化されて

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\tau}+\left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}_\bullet\right)\bar{\rho}=-\bar{\rho}\left(\vec{\nabla}_\bullet\cdot\vec{U}\right) \tag{2-12}$$

となる．この式には無次元数は現れない．式(2-12)を解くことにより，無次元密度が得られる．なお，低マッハ数近似においては，$\bar{\rho}=1$ と定数と見なせるので，式(2-12)は明らかに

$$\vec{\nabla}_\bullet\cdot\vec{U}=0 \tag{2-13}$$

となり，式(1-7)に帰着される．このとき，式(2-10)は

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial\tau}+\left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}_\bullet\right)\vec{U}=-\vec{\nabla}_\bullet P'+\frac{1}{Re}\nabla_\bullet^2\vec{U} \tag{2-14}$$

となり，式(1-6)と完全に同じとなる．

エネルギー方程式にも圧力が含まれるので，低マッハ数の時の近似を試みる．式(2-8)の右辺第二項は修正されて次のようになる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+\left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}_\bullet\right)\Theta&=\frac{1}{RePr}\nabla_\bullet^2\Theta\\&+\left(\gamma-1\right)Ma^2\frac{D_\bullet P'}{D\tau}+\left(\gamma-1\right)\frac{Ma^2}{Re}\Phi_D,\quad\left(\because\quad\frac{P}{\gamma Ma^2}=P'\right)\end{aligned} \tag{2-15}$$

普通は，右辺の第二項と第三項を無視した次式が用いられる．

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+\left(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}_\bullet\right)\Theta=\frac{1}{RePr}\nabla_\bullet^2\Theta \tag{2-16}$$

一様流中に置かれた物体まわりの流れを例にとり説明してきたが，流れを支配するのは，レイノルズ数，マッハ数（および比熱比）であることがわかる．密度変化や粘性散逸などにより，流体の温度変化を伴うことにもなるので，エネルギー方程式も同時に解く必要がある．また，プラントル数などの物性値も一定値とは見なし難くなるので，解析は非常に複雑になる．

ただ，流速が音速と比べて十分に小さいと見なせる時は，密度変化が無視できて，非圧縮性流れとして近似でき，自然対流のような浮力の寄与を考慮しなければ，レイノルズ数だけで流れが決定される．このとき，プラントル数は熱伝達に影響を与えるだけである．

その他の無次元数

熱の移動現象を取り扱う場合でも，二相流体を取り扱う場合でも，支配方程式が決まってさえいれば，前節と同様に無次元化を施すことによって，様々な無次元数を得ることができる．主な無次元数を以下に列挙する．

Sr：ストローハル数　$Sr=\dfrac{fl}{u_0}$　（時間変動による慣性力）/（対流による慣性力）

Fr：フルード数　$Fr=\dfrac{u_0}{\sqrt{gl}}$　（慣性力）/（重力）　（重力場における二相流体で必要）

G：ガリレイ数　$G=\dfrac{gl^3}{\nu^2}$　（重力）（慣性力）/（粘性力の２乗）

We：ウェバー数　$We=\dfrac{\rho u_0^2 l}{\gamma}$　（慣性力）/（表面張力）　（液滴や気泡の力学で必要）

Pr：プラントル数　$Pr=\dfrac{\nu}{\alpha}$　（動粘度）/（温度伝導率）　（流体の物性値を表す）

Gr：グラスホフ数　$Gr=\dfrac{g\beta\Delta\theta l^3}{\nu^2}$　（慣性力）（浮力）/（粘性力の２乗）　（Boussinesq 近似の浮力項を含んだ Navier-Stokes 方程式を無次元化したときに現れる）

Ra：レイリー数　$Ra=\dfrac{g\beta\Delta\theta l^3}{\alpha\nu}=Gr\,Pr$　（浮力項を含んだ Stokes 方程式とエネルギー方程式を無次元化したときに現れる）

Pe：ペクレ数　$Pe=\dfrac{u_0 l}{\alpha}=Re\,Pr$　（強制対流熱伝達で登場）

Nu：ヌセルト数　$Nu=\dfrac{hl}{k}$　（対流熱移動量）/（伝導熱移動量）

Ha：ハルトマン数　$Ha=\sqrt{\dfrac{\sigma}{\mu}}B_0 l$，　Ha^2　＝（電磁力）/（粘性力）