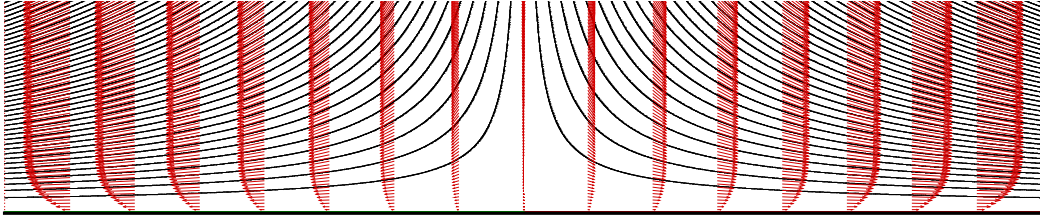


二次元渦み点流れ

本稿では、非圧縮性流れを仮定した Navier-Stokes 方程式の厳密解の一例として、下図に示すような二次元渦み点流れを考える。黒線は流線を表し、赤矢印は速度ベクトルを表す。



壁面から十分に離れた領域では、ポテンシャル流れと見なされ、それは次式で与えられる。

$$u = ax, \quad v = -ay \quad (a > 0) \quad (1)$$

渦み点を原点とする二次元デカルト座標系の Navier-Stokes の運動方程式は、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

と与えられる。相似解を仮定できるとき、境界層の内外の領域において

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

が成り立つ。式(3)を x で微分し、式(4)を適用すると

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (5)$$

この式の意味するところは、 x 方向の圧力勾配が y 方向に変化しないということである。つまり、

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial x} = f(x) \quad (6)$$

となる。次に、式(2)を無次元化するにあたり、以下のように無次元変数を置く。

$$X = \frac{x}{x_a}, \quad Y = \frac{y}{y_a}, \quad U = \frac{u}{u_a}, \quad V = \frac{v}{v_a} \quad (7)$$

大文字は無次元変数を示し、右辺の下付添え字 a が付くものが未定参照量を示す。式(7)を

式(2)に代入すると,

$$\frac{u_a^2}{x_a} U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{v_a u_a}{y_a} V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{u_a}{x_a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{u_a}{y_a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + \underbrace{\frac{v_a x_a}{y_a u_a}}_{[1]} V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{x_a}{\rho u_a^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\frac{\nu}{x_a u_a}}_{[2]} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \underbrace{\frac{\nu x_a}{y_a^2 u_a}}_{[3]} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (8)$$

境界条件

$$\begin{cases} y=0: & u=v=0 \\ y \rightarrow \infty: & u=ax, \quad v=-ay \end{cases} \quad (9)$$

についても無次元化をする.

$$\begin{cases} Y=0: & U=V=0 \\ Y \rightarrow \infty: & U = \underbrace{\frac{ax_a}{u_a}}_{[4]} X, \quad V = -\underbrace{\frac{ay_a}{v_a}}_{[5]} Y \end{cases} \quad (10)$$

無次元速度は, 以下の各無次元量に依存する.

$$(U, V) = f \left(X, Y, \underbrace{\frac{v_a x_a}{y_a u_a}}_{[1]}, \underbrace{\frac{\nu}{x_a u_a}}_{[2]}, \underbrace{\frac{\nu x_a}{y_a^2 u_a}}_{[3]}, \underbrace{\frac{ax_a}{u_a}}_{[4]}, \underbrace{\frac{ay_a}{v_a}}_{[5]} \right) \quad (11)$$

これより, [1]から[5]の各無次元量について, 未定参照量を決定していく.

$$[4]=1 \text{ と置くことにより, } u_a = ax_a \quad (12)$$

$$[3]=1 \text{ と置くことにより, 式(12)を代入し, } y_a = \sqrt{\frac{\nu x_a}{u_a}} = \sqrt{\frac{\nu}{a}} \quad (13)$$

$$[1]=1 \text{ と置くことにより, 式(12)(13)を代入し, } v_a = \frac{y_a u_a}{x_a} = \frac{\sqrt{\nu/a} \cdot ax_a}{x_a} = \sqrt{a\nu} \quad (14)$$

$$[2] \text{ は } \frac{\nu}{x_a u_a} = \frac{\nu}{ax_a^2} \equiv \frac{1}{Re} \text{ (後にわかるがここは無関係)}$$

$$[5] \text{ は } \frac{ay_a}{v_a} = \frac{a}{\sqrt{a\nu}} \sqrt{\frac{\nu}{a}} = 1$$

さらに, $X=1$ と置き, 相似解を仮定する. つまり, 式(7)は次式のように置き換えられる.

$$X = \frac{x}{x_a} = 1, \quad Y = \frac{y}{y_a} = y \sqrt{\frac{a}{\nu}} \equiv \eta, \quad U(\eta) = \frac{u(x,y)}{ax}, \quad V(\eta) = \frac{v(y)}{\sqrt{a\nu}} \quad (15)$$

式(15)を利用して、式(2)の各項を求める。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(axU) = aU + ax \frac{\partial U}{\partial x} = aU + ax \frac{dU}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = aU$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(axU) = ax \frac{dU}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = ax \frac{dU}{d\eta} \sqrt{\frac{a}{v}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x}(aU) = a \frac{\partial U}{\partial x} = a \frac{dU}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

(ここが厳密に落ち、 Re 数は関係なくなる)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(ax \frac{dU}{d\eta} \sqrt{\frac{a}{v}} \right) = ax \sqrt{\frac{a}{v}} \frac{d^2 U}{d\eta^2} \sqrt{\frac{a}{v}} = \frac{a^2 x}{v} \frac{d^2 U}{d\eta^2}$$

これらを式(2)に代入し、

$$axU \cdot aU + \sqrt{av}V \cdot ax \frac{dU}{d\eta} \sqrt{\frac{a}{v}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{a^2 x}{v} \frac{d^2 U}{d\eta^2}$$

整理して次式を得る。

$$\underbrace{U^2 + V \frac{dU}{d\eta} - \frac{d^2 U}{d\eta^2}}_{\text{function of } y} = -\underbrace{\frac{1}{\rho a^2 x} \frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{function of } x} \equiv -P_x \quad (16)$$

これからわかるように、左辺は y の関数であり、右辺は x の関数であるから、結局はそれぞれが定数でなければならない。右辺に示される無次元の X 方向圧力勾配を次式で定義する。

$$P_x \equiv \frac{1}{\rho a^2 x} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{f(x)}{\rho a^2 x} = \frac{k_p}{\rho a^2} = \text{const.} \quad (17)$$

ここで、 k_p は一定値であり、境界層外のポテンシャル流の状況から決めることができる。

式(17)を x で積分して、次式のように圧力分布が x の関数と y の関数の和として表現されることが示される。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = k_p x \Rightarrow p(x, y) = \frac{1}{2} k_p x^2 + p_2(y) \quad (18)$$

では、 k_p を求める。ポテンシャル領域における x 方向の運動方程式は次式で与えられる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

これに、式(1)および(18)を代入して、

$$ax \cdot a = -\frac{1}{\rho} k_p x \Rightarrow k_p = -\rho a^2 \quad (19)$$

無次元圧力勾配は、式(17)から

$$P_X = \frac{k_p}{\rho a^2} = \frac{-\rho a^2}{\rho a^2} = -1 \quad (20)$$

と求まる。結局、 x 方向の運動方程式は

$$U^2 + V \frac{dU}{d\eta} = 1 + \frac{d^2U}{d\eta^2} \quad (21)$$

また連続の式は、各項がそれぞれ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = aU, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a \frac{dV}{d\eta} \quad (\text{以下を参照})$$

であるから、以下のように得られる。

$$U + \frac{dV}{d\eta} = 0 \quad (22)$$

続いて、式(3)の各項を求める。 y 方向の運動方程式は、圧力を求めるためだけに使われるが、参考までに示す。

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{av}V) = \sqrt{av} \frac{\partial V}{\partial x} = \sqrt{av} \frac{dV}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{av}V) = \sqrt{av} \frac{\partial V}{\partial y} = \sqrt{av} \frac{dV}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{av} \frac{dV}{d\eta} \sqrt{\frac{a}{v}} = a \frac{dV}{d\eta}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(a \frac{dV}{d\eta} \right) = a \frac{d^2V}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = a \sqrt{\frac{a}{v}} \frac{d^2V}{d\eta^2}$$

これらの結果を式(3)に代入し、

$$ax \cdot 0 + \sqrt{av}V \cdot a \frac{dV}{d\eta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + va \sqrt{\frac{a}{v}} \frac{d^2V}{d\eta^2}$$

整理すると、

$$V \frac{dV}{d\eta} = -\frac{1}{\rho a \sqrt{av}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{d^2V}{d\eta^2}$$

圧力項に対して、式(18)を代入すると、

$$V \frac{dV}{d\eta} = -\frac{1}{\rho a \sqrt{av}} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} k_p x^2 + p_2(y) \right] + \frac{d^2V}{d\eta^2}$$

$$V \frac{dV}{d\eta} = -\frac{1}{\rho a \sqrt{av}} \frac{dp_2(y)}{dy} + \frac{d^2V}{d\eta^2}$$

ここで、 $p_2(y) = \rho avP(\eta)$ と置けば、

$$V \frac{dV}{d\eta} = -\frac{dP}{d\eta} + \frac{d^2V}{d\eta^2} \quad (23)$$

を得る。最終的に、無次元量の定義は以下の通りである。

$$\begin{aligned} \eta &= y\sqrt{\frac{a}{\nu}}, \quad u(x, y) = ax \cdot U(\eta), \quad v(y) = \sqrt{a\nu} \cdot V(\eta), \\ p(x, y) &= -\frac{1}{2}\rho a^2 x^2 + \rho av \cdot P(\eta) \end{aligned} \quad (24)$$

数式のまとめ

以下の連立常微分方程式を反復法などで解く。

$$\begin{aligned} U + V' &= 0 && V \text{ を求める} \\ -U^2 - VU' + 1 + U'' &= 0 && U \text{ を求める} \\ P &= -\frac{1}{2}V^2 + V' && P \text{ を求める} \end{aligned}$$

B. C.

$$\begin{cases} \eta = 0: & U = V = 0 \\ \eta \rightarrow \infty: & U = 1 \end{cases}$$

なお、式(10)の境界条件において、 $\eta \rightarrow \infty: V = -\eta$ となるが、3階の微分方程式なので、これを4つ目の境界条件として与えることはできない。この条件なしに、実際に得られた V の値は、 η が十分に大きくなると、 $V \cong -\eta + 0.648$ であるので、排除厚さ δ_1 は、式(22)をふまえて、以下のようになる。

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{ax}\right) dy = \sqrt{\frac{\nu}{a}} \int_0^\infty (1 - U) d\eta = \sqrt{\frac{\nu}{a}} [\eta + V]_0^\infty = 0.648 \sqrt{\frac{\nu}{a}} \quad (25)$$

式(1)で与えられたポテンシャル流れの速度分布は、式(24)を考慮すると、以下のように修正されることがわかる。

$$u = ax, \quad v = -ay + 0.648\sqrt{a\nu} = -a\left(y - 0.648\sqrt{\nu/a}\right) = -a(y - \delta_1) \quad (26)$$

これより、 y 方向に δ_1 だけポテンシャル領域がシフトしていることがわかる。

図1に数値計算結果を示す。 $\eta = 2.38$ で99%の境界層厚さに達する。壁面の速度勾配 U' は1.2326であった。図2には、速度ベクトル表示による流れ場の可視化を示す。速度は澁み点位置から壁面に平行な方向 (x 方向) に比例して、大きくなることがわかるが、境界層の厚さは変化しない。表1に数値解を示す。層外では、圧力は二次関数的に変化する。

解析結果

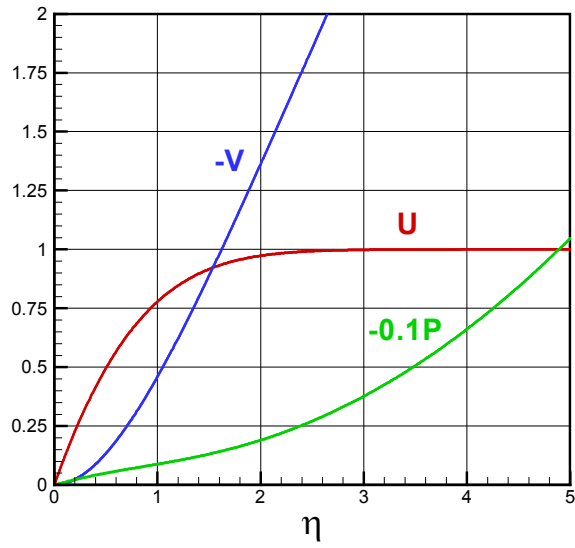


図1 2次元澱み点流れの計算結果 (V と P は負号を付けて表示)

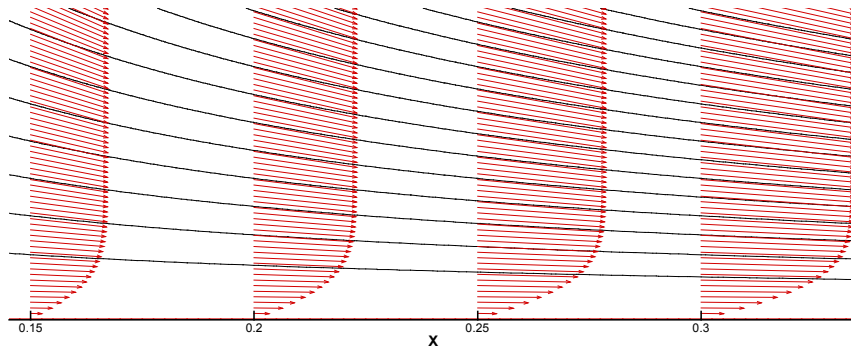


図2 2次元澱み点流れの境界層付近の流線 (黒) と速度分布 (赤)

表1 数値解

η	U	V	P
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.500000	0.494650	-0.133579	-0.503539
1.000000	0.777866	-0.459217	-0.883284
1.500000	0.916169	-0.887317	-1.309823
2.000000	0.973218	-1.361961	-1.900681
2.500000	0.992852	-1.854415	-2.712278
3.000000	0.998424	-2.352543	-3.765654
3.500000	0.999716	-2.852160	-5.067125
4.000000	0.999958	-3.352096	-6.618233
4.500000	0.999995	-3.852087	-8.419284
5.000000	1.000000	-4.352086	-10.470328