

Taylor-Couette 流れの安定性

支配方程式

図1に解析モデルを示す．本稿では，非圧縮性のニュートン流体を対象とし，粘性散逸は十分に小さく無視できるものとして，等温状態（密度や動粘度は一定と仮定）での回転軸対称流れを想定する．灰色部分が解析領域に相当し，周方向のみの基本流れが遠心力の影響により不安定になると，定在的な二次流れいわゆるトロイダル渦が発生することが知られる．連続の式と運動方程式は，円筒座標系（軸対称仮定）を用いて以下のように表される．

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) - g \tag{4}$$

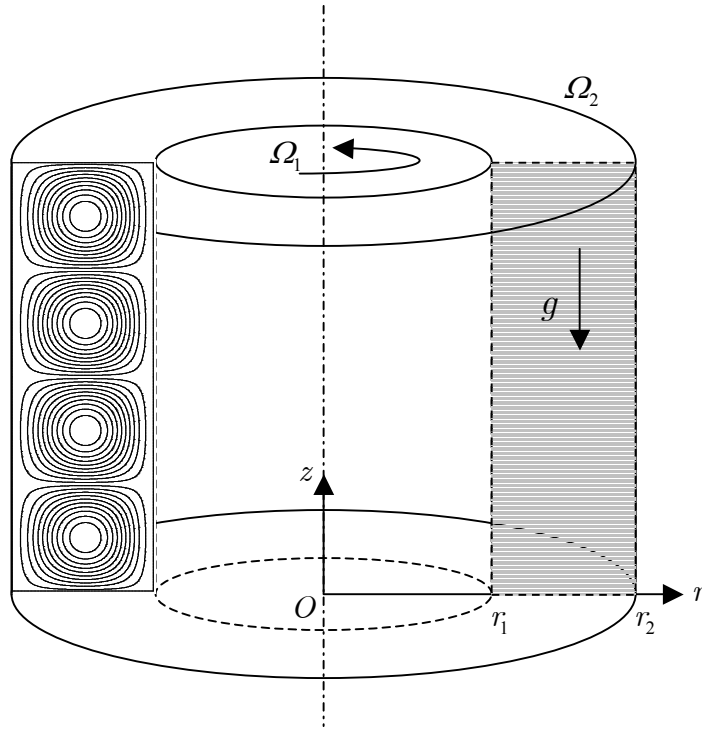


図1 解析モデル

基本状態と線形化

円筒容器は軸方向に無限に長いものとして、上下端の影響を無視する。このとき、基本状態としては、周方向速度成分のみを有する。

<周方向速度>

$$\bar{u}_\theta(r) = -\frac{r_2^2 \Omega_2 - r_1^2 \Omega_1}{r_1^2 - r_2^2} r + \frac{r_1^2 r_2^2 (\Omega_2 - \Omega_1)}{r_1^2 - r_2^2} \frac{1}{r} \quad (5)$$

<圧力>

$$\bar{p}(r, z) = \int \frac{\rho \bar{u}_\theta^2}{r} dr - \rho g z + p_0 \quad (6)$$

速度や圧力といった変数については、基本状態と微小擾乱の和として、以下のように表す。

$$\begin{aligned} u_\theta(r, z, t) &= \bar{u}_\theta(r) + v'(r, z, t), & u_r(r, z, t) &= u'(r, z, t), & u_z(r, z, t) &= w'(r, z, t), \\ p(r, z, t) &= \bar{p}(r, z) + p'(r, z, t) \end{aligned} \quad (7)$$

微小擾乱同士の積を無視して線形化すると、以下の方程式を得る。

$$\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial r} - \frac{u'}{r^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right) + \frac{2\bar{u}_\theta v'}{r} \quad (9)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial r} - \frac{v'}{r^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{d\bar{u}_\theta}{dr} + \frac{\bar{u}_\theta}{r} \right) u' \quad (10)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w'}{\partial r} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) \quad (11)$$

ここで、二次流れに起きるであろう軸方向の周期性を考慮して、速度や圧力の各微小擾乱成分を以下の形（振幅関数と三角関数の積）で与えるものとする。ここで、 a は軸方向波数であり実数、 s は角振動数であり複素数とする。

$$\frac{u'}{\bar{u}(r)} = \frac{v'}{\bar{v}(r)} = \frac{w'}{\bar{w}(r)} = \frac{p'}{\bar{p}(r)} = \exp(iaz + st) \quad (12)$$

線形安定性解析

無次元の連立常微分方程式は以下のようなになる。

<基本速度>

$$\bar{U}_\theta(R) = \frac{\mu - \eta^2}{1 - \eta^2} R + \frac{\eta^2 (1 - \mu)}{1 - \eta^2} \frac{1}{R} \quad (13)$$

<振幅関数の擾乱方程式>

$$D_* \tilde{U} + ik \tilde{W} = 0 \quad (14)$$

$$S\tilde{U} = -D\tilde{P} + (DD_* - k^2)\tilde{U} + Re_\Omega \frac{2\bar{U}_\theta}{R}\tilde{V} \quad (15)$$

$$S\tilde{V} = (DD_* - k^2)\tilde{V} - Re_\Omega (D_*\bar{U}_\theta)\tilde{U} \quad (16)$$

$$S\tilde{W} = -ik\tilde{P} + (D_*D - k^2)\tilde{W} \quad (17)$$

ここで、無次元変数および無次元数は以下のように示される。代表長さには、外円筒半径 r_2 をとるものとする。

$$R = \frac{r}{r_2}, \quad \bar{U}_\theta = \frac{\bar{u}_\theta}{\Omega_1 r_2}, \quad (\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}) = \frac{(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})}{\Omega_1 r_2}, \quad \tilde{P} = \frac{\tilde{p}}{\rho \nu \Omega_1}, \quad (18)$$

$$Re_\Omega = \frac{\Omega_1 r_2^2}{\nu}, \quad k = r_2 a, \quad \eta = \frac{r_1}{r_2}, \quad \mu = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}, \quad S = \frac{s}{\nu/r_2^2}, \quad D \equiv \frac{d}{dR}, \quad D_* \equiv \frac{d}{dR} + \frac{1}{R}$$

境界条件は、以下のとおりである。

$$\begin{cases} R = \eta: \tilde{U} = \tilde{V} = \tilde{W} = 0 & \text{(Inner wall)} \\ R = 1: \tilde{U} = \tilde{V} = \tilde{W} = 0 & \text{(Outer wall)} \end{cases} \quad (19)$$

Chandrasekar^[1]にならい、解析データの整理のために、以下の二つの無次元数を導入する。

$$Ta = \frac{4\Omega_1^2 r_1^4 (1-\mu)(1-4\mu)}{\nu^2 (1-\eta^2)^2} = 4Re_\Omega^2 \frac{\eta^4 (1-\mu)(1-4\mu)}{(1-\eta^2)^2}, \quad \kappa = \frac{1-\mu/\eta^2}{1-\mu} \quad (20)$$

ここでは、 $S=0$ として解析をすすめる。これは、不安定性により発生する二次流れが定在的な渦であることを意味する。式(14)-(17)の連立常微分方程式の境界値問題を解くにあたって、図2に示すような一次元のスタッガード格子を用いて、中心差分法により離散化し、 k を入力パラメータとして与えたときの中立的な Re_Ω を求めながら、各振幅関数を数値的に求めた。このとき、圧力場を得るためのアルゴリズムとしては HSMAC 法を用いた。表1は、半径比 $\eta=0.5$ に対する、格子点数 201 で得られた数値計算結果を示す。 $\mu > 0.25$ の場合には、Rayleigh の判定条件から、常に安定である。本解析結果は、Chandrasekar の結果と概ね一致している。本解析結果の方が、いずれの回転比においても若干低いテイラー数を取ることとなった。Chandrasekar の著書では、臨界波数ではなく、臨界波数付近のある波数に対応するテイラー数が示されているだけであるので、本解析で得られたテイラー数の方が若干小さめの値を示したことは妥当であると考えられる。図3, 4には $\mu=0$ (外側円筒が静止) の、また図5, 6には $\mu=-0.5$ (外側円筒が内側円筒の半分の角速度で逆回転) の可視化結果を示す。

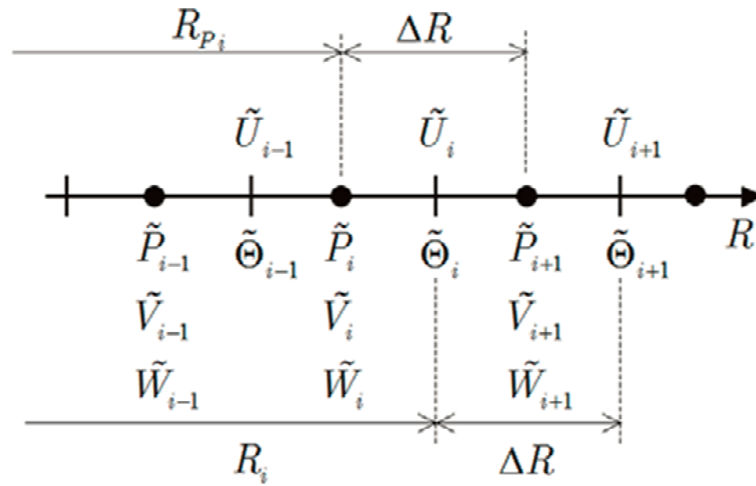


図2 半径方向の一次元スタガード格子と各変数の定義点

表1 解析結果の比較 ($\eta = 0.5$)

		本解析 (201 grids)		Chandrasekar ^[1]	
κ	μ	臨界波数	臨界 Ta 数	波数	Ta 数
0	1/4	6.286	15316	6.4	15332
0.4	1/6	6.293	19518	6.4	19542
0.6	2/17	6.299	22617	6.4	22644
1.0	0	6.325	33062	6.4	33100
4/3	-1/8	6.403	53210	6.4	53280
1.6	-1/4	6.715	98520	6.4	99072
1.8	-4/11	7.819	197715	7.8	199540
1.9	-9/21	8.733	288761	8.6	293630
2.0	-1/2	9.602	417734	9.6	428650

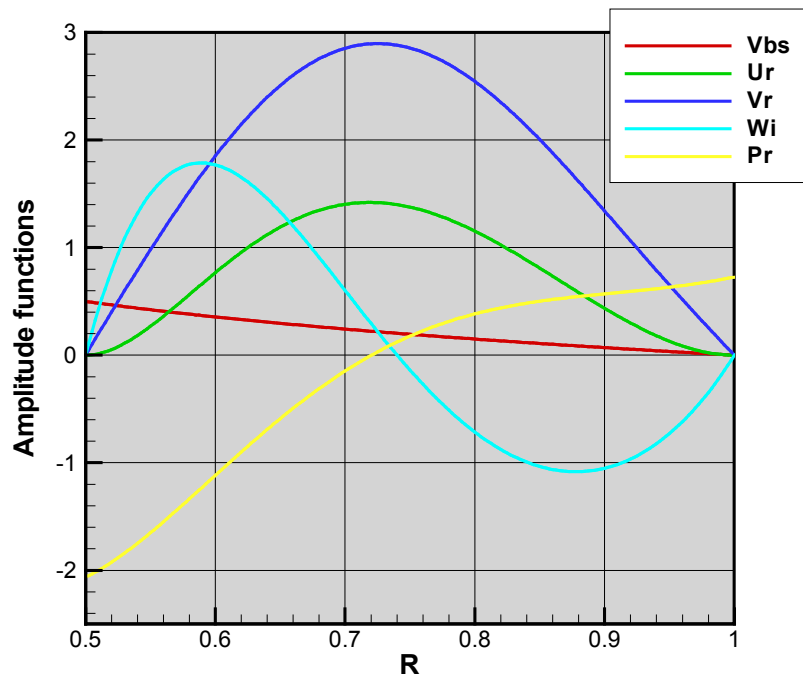


図3 各振幅関数 ($\eta = 0.5, \mu = 0, k = 6.325$)

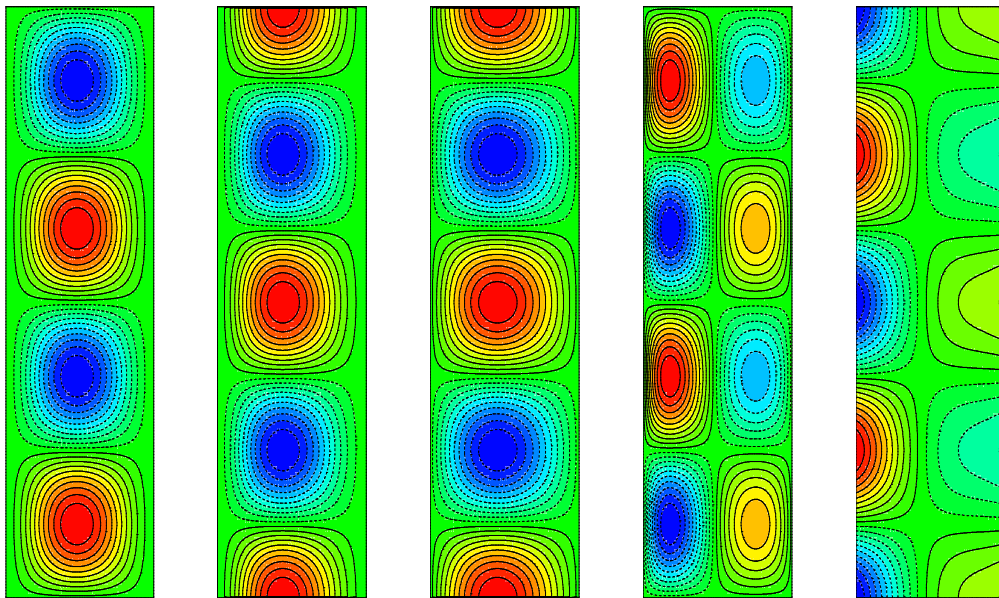


図4 二波長分の固有関数の可視化 ($\eta = 0.5, \mu = 0, k = 6.325$)

左から、Stokes の流れ関数，半径方向速度，周方向速度，軸方向速度，および圧力

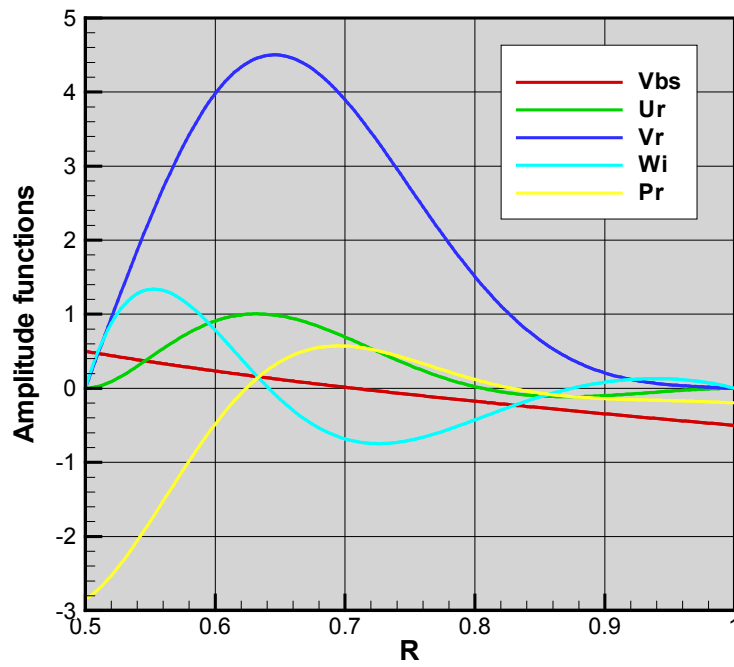


図 5 各振幅関数 ($\eta = 0.5, \mu = -0.5, k = 9.602$)

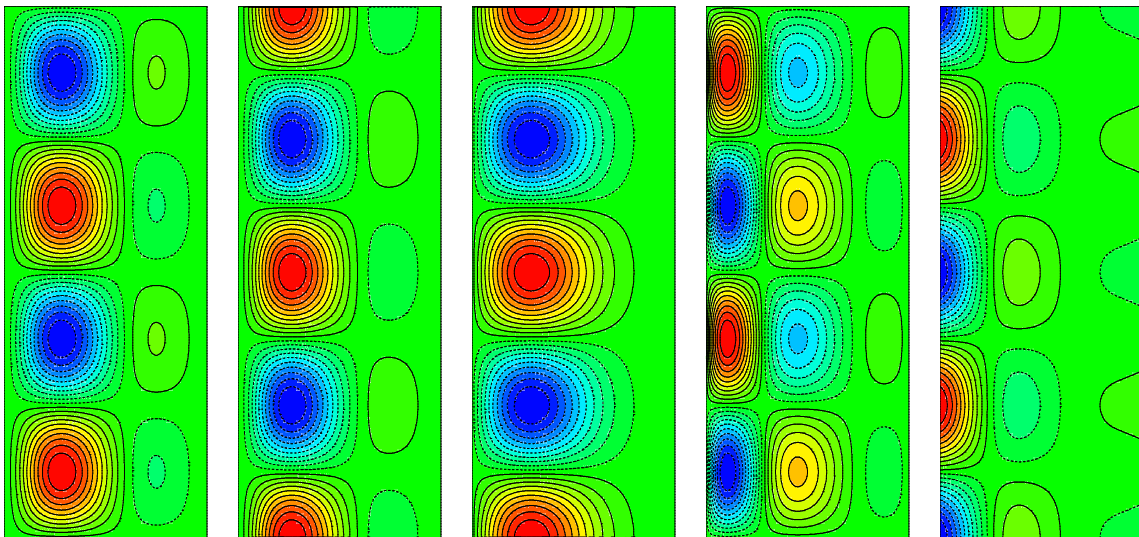


図 6 二波長分の固有関数の可視化 ($\eta = 0.5, \mu = -0.5, k = 9.602$)

左から, Stokes の流れ関数, 半径方向速度, 周方向速度, 軸方向速度, および圧力

参考文献

1. S. Chandrasekar, "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", 1961.