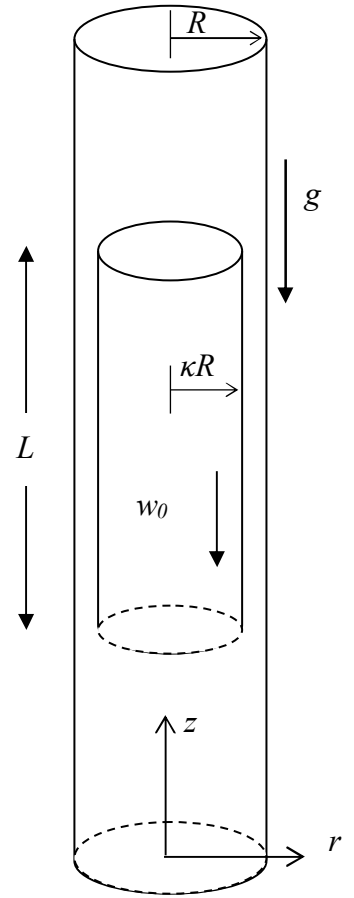


## 粘性流体中を落下するシリンダー問題

**問題** 右図に示されるように、鉛直方向に縦長の円筒容器内に粘性係数が未知の Newton 流体が充填されている。外側の円筒容器の底面は密閉されている。この円筒容器の内部には、それと同軸を持つ少し半径の小さいシリンダーが一定速度  $w_0$  で重力と平行に落下しているものとする。流体の密度を  $\rho$ 、シリンダーの密度を  $\rho_c$  とする。外側の円筒半径は  $R$  であり、内側のシリンダーの半径は  $\kappa R$  とする ( $\kappa$  は半径比を表し、1 より小さい)。重力加速度の大きさを  $g$  とし、以下の問いに答えよ。



- 1) 軸方向の圧力勾配を密度で割ったものは一定であると仮定し、  
 $G = -[g + (dp/dz)/\rho]$  と置く。隙間部分の流速分布  $w(r)$  を、 $G$ 、外半径  $R$ 、半径座標  $r$ 、動粘性係数  $\nu$ 、半径比  $\kappa$ 、および落下速度  $w_0$  で表せ。
- 2) シリンダーが等速で落下することにより、シリンダー下部の流体は減少する。その減少した流体の体積は、隙間を上昇する流れの発生につながる。このような考察から、 $G$  の値を定めよ。つまり、 $G$  を外半径  $R$ 、動粘性係数  $\nu$ 、半径比  $\kappa$ 、および落下速度  $w_0$  で表せ。
- 3) 上の二つの結果を利用し、 $w(r)$  を外半径  $R$ 、半径座標  $r$ 、半径比  $\kappa$ 、および落下速度  $w_0$  で表せ。
- 4) シリンダーに作用する力は、a) 壁面速度勾配に基づく粘性力、b) シリンダーの上面と下面での圧力の差に基づく圧力勾配力、c) 重力が考えられる。これらの力のつりあいを考えることにより、粘性係数  $\mu$  を求めるための式を導出せよ。ただし、b) の効果については、2) で得た結果を利用せよ。

### 解答と解説

- 1) まずは、周方向の速度成分  $v$  が無いときの定常軸対称の円筒座標系における連続の式および運動方程式を書くとそれぞれ以下のように示される。

$$\text{連続の式} \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\text{半径方向} \quad u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \tag{2}$$

$$\text{軸方向} \quad u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g \tag{3}$$

本来は、これらの式を解かなければならないが、コンピュータを用いた CFD 解析以外では非常に困難

である。そこで、以下のように幾つかの仮定をする。

- ・半径方向の速度成分  $u$  は軸方向の速度成分  $w$  に比べて小さく無視できる（実際に移動するシリンダーの角付近をまわり込む流れ、すなわち  $u$  はあるのだが目をつぶる）
- ・  $w$  は  $w(r)$  とする。つまり軸方向速度は半径のみの関数とする。平行流近似。

そうすると、式(1)は不要になる。式(2)は

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (4)$$

となり、圧力は半径方向には変化しないことを意味する。つまり

$$p = p(z) \quad (5)$$

である。式(3)は、

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - g \quad (6)$$

となる。式(6)を以下のように変形する。

$$\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(z)}{\partial z} + g}_{z \text{ の関数}} + \nu \underbrace{\left( \frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r)}{\partial r} \right)}_{r \text{ の関数}} = \text{const.} = -G \quad (7)$$

左辺は  $z$  のみの関数であるのに対し、右辺は  $r$  のみの関数である。したがって、それぞれの項は定数でなければならない。結局、解くべき軸方向の運動方程式は

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -\frac{G}{\nu}, \quad \left[ \text{where } G \equiv -\left( \frac{1}{\rho} \frac{dp(z)}{dz} + g \right) \right] \quad (8)$$

これを2度積分する。

$$r \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{dw}{dr} = -\frac{G}{\nu} r, \quad \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{G}{\nu} r, \quad \frac{dw}{dr} = -\frac{G}{2\nu} r + \frac{c_1}{r} \quad (9)$$

積分定数を2つ用いて、次のようになる。

$$w = -\frac{G}{4\nu} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad (10)$$

境界条件を代入し、積分定数を定めることができる。

$$w(\kappa R) = -\frac{G}{4\nu} (\kappa R)^2 + c_1 \ln(\kappa R) + c_2 = -w_0 \quad (\text{シリンダー落下速度を負にとる})$$

$$w(R) = -\frac{G}{4\nu} (R)^2 + c_1 \ln(R) + c_2 = 0 \quad (\text{外壁は静止})$$

これより

$$c_1 = -\frac{1}{\ln \kappa} \left[ w_0 + \frac{GR^2}{4\nu} (1 - \kappa^2) \right], \quad c_2 = \frac{GR^2}{4\nu} \left[ 1 + \frac{\ln R}{\ln \kappa} (1 - \kappa^2) \right] + \frac{\ln R}{\ln \kappa} w_0$$

よって、 $G$  は未定のままであるが、速度分布は、いったん次式のように求まる。

$$w(r) = \frac{GR^2}{4\nu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] - \left[ w_0 + \frac{GR^2}{4\nu} (1 - \kappa^2) \right] \left( \frac{\ln r}{\ln \kappa} - \frac{\ln R}{\ln \kappa} \right) \quad (11)$$

2) シリンダーと外円管の間隙を通過する流量 $Q$ は、 $r$ を掛けて積分することに注意して、

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\kappa R}^R 2\pi r w dr = 2\pi \int_{\kappa R}^R \left\{ \frac{GR^2}{4\nu} \left[ r - \frac{r^3}{R^2} \right] - \left[ w_0 + \frac{GR^2}{4\nu} (1 - \kappa^2) \right] \left( \frac{r \ln r}{\ln \kappa} - \frac{\ln R}{\ln \kappa} r \right) \right\} dr \\ &= 2\pi \frac{GR^2}{4\nu} \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_{\kappa R}^R - \frac{2\pi}{\ln \kappa} \left[ w_0 + \frac{GR^2}{4\nu} (1 - \kappa^2) \right] \left[ \frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} - \ln R \cdot \frac{r^2}{2} \right]_{\kappa R}^R \\ Q &= 2\pi \frac{GR^4}{4\nu} \left( \frac{1 - \kappa^2}{2} \right)^2 - \frac{2\pi}{\ln \kappa} \frac{R^2}{4} \left[ w_0 + \frac{GR^2}{4\nu} (1 - \kappa^2) \right] \left[ -2\kappa^2 \ln \kappa - (1 - \kappa^2) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

シリンダー下部での流体の減少率は、

$$Q = \pi \kappa^2 R^2 w_0$$

したがって、次の等式が成立する。

$$2\pi \frac{GR^4}{4\nu} \left( \frac{1 - \kappa^2}{2} \right)^2 - \frac{2\pi}{\ln \kappa} \frac{R^2}{4} \left[ w_0 + \frac{GR^2}{4\nu} (1 - \kappa^2) \right] \left[ -2\kappa^2 \ln \kappa - (1 - \kappa^2) \right] = \pi \kappa^2 R^2 w_0$$

これを計算して、次式のように $G$ が定まる。

$$G = - \frac{4}{(1 + \kappa^2) \ln \kappa + 1 - \kappa^2} \frac{\nu}{R^2} w_0 \quad (13)$$

3) このとき、速度分布は式(11)から

$$\begin{aligned} w &= - \frac{4}{(1 + \kappa^2) \ln \kappa + 1 - \kappa^2} \frac{\nu}{R^2} w_0 \frac{R^2}{4\nu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \\ &\quad - \left[ w_0 - \frac{4}{(1 + \kappa^2) \ln \kappa + 1 - \kappa^2} \frac{\nu}{R^2} w_0 \frac{R^2}{4\nu} (1 - \kappa^2) \right] \left( \frac{\ln r}{\ln \kappa} - \frac{\ln R}{\ln \kappa} \right) \end{aligned}$$

これを整理して

$$w(r) = - \frac{1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 + (1 + \kappa^2) \left( \ln \frac{r}{R} \right)}{(1 + \kappa^2) \ln \kappa + 1 - \kappa^2} w_0 \quad (14)$$

4) 粘性力算出のために、まず速度勾配を求める

$$\frac{dw}{dr} = - \frac{-\frac{2r}{R^2} + (1 + \kappa^2) \frac{1}{r}}{(1 + \kappa^2) \ln \kappa + 1 - \kappa^2} w_0, \quad \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=\kappa R} = - \frac{w_0}{(1 + \kappa^2) \ln \kappa + 1 - \kappa^2} \frac{1 - \kappa^2}{\kappa R}$$

シリンダーに働く粘性力は、上向きを正として

$$f_v = \underbrace{2\pi\kappa RL}_{\text{側面積}} \cdot \underbrace{\mu \frac{dw}{dr}}_{\text{粘性応力}} \Big|_{r=\kappa R} = -\frac{2\pi L\mu(1-\kappa^2)w_0}{(1+\kappa^2)\ln\kappa+1-\kappa^2}$$

シリンダーに働く圧力勾配による力は、上向きを正として

$$f_p = \pi\kappa^2 R^2 (p|_{\text{bottom}} - p|_{\text{top}}) = \pi\kappa^2 R^2 L\rho(G+g) = -\pi\kappa^2 R^2 L \left( \frac{4}{(1+\kappa^2)\ln\kappa+1-\kappa^2} \frac{\rho\nu}{R^2} w_0 - \rho g \right)$$

重力は、下向きを正として

$$f_g = \pi\kappa^2 R^2 L\rho_C g$$

力のつり合いから

$$\underbrace{\pi\kappa^2 R^2 L\rho_C g}_{\text{下向き}} = -\underbrace{\frac{2\pi L\mu(1-\kappa^2)w_0}{(1+\kappa^2)\ln\kappa+1-\kappa^2}}_{\text{上向き粘性力}} - \underbrace{\pi\kappa^2 R^2 L \left( \frac{4}{(1+\kappa^2)\ln\kappa+1-\kappa^2} \frac{\mu}{R^2} w_0 - \rho g \right)}_{\text{上向き圧力勾配による力}}$$

これを粘性係数について整理すれば、

$$\mu = -\left( \frac{1-\kappa^2}{1+\kappa^2} + \ln\kappa \right) \frac{(\rho_C - \rho)g\kappa^2 R^2}{2w_0} \quad (15)$$

これより、半径比、密度、重力加速度、落下速度が分かれば、粘性係数が求まる。今、半径比が1に近いとし、 $\varepsilon = 1 - \kappa$ とおけば、級数展開により、以下のように与えることもできる（付録参照）。

$$\mu \cong \frac{(\rho_C - \rho)gR^2\varepsilon^3}{6U} \left( 1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{13}{20}\varepsilon^2 + \dots \right) \quad (16)$$

最初に幾つかの仮定をしているが、その仮定がどのような状況だと良い近似なのかも考察が必要である。例えば、シリンダーや円筒容器が十分に長い場合が予想される。また半径比 $\kappa$ の影響もあるだろう。本理論解析が正しいかどうか（精度を調べるには、粘性係数が既知の流体を用いて実験を行い、落下速度が次式に合うかどうかを調べれば良いと思われる。

$$w_0 = -\kappa^2 \left( \frac{1-\kappa^2}{1+\kappa^2} + \ln\kappa \right) \frac{(\rho_C - \rho)gR^2}{2\mu} \quad (17)$$

最終的な速度分布は、式(14)と式(17)から

$$w(r) = \frac{(\rho_C - \rho)gR^2}{2\mu} \frac{\kappa^2}{1+\kappa^2} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 + (1+\kappa^2) \ln \left( \frac{r}{R} \right) \right] \quad (18)$$

となる。また、無次元の速度分布は、

$$W(X) = \frac{w(r)}{(\rho_C - \rho)gR^2} = \frac{\kappa^2}{1+\kappa^2} \left[ 1 - X^2 + (1+\kappa^2) \ln X \right], \quad \left( \text{where } X = \frac{r}{R} \right) \quad (19)$$

となる。この式から、落下速度の大きさは、密度差、重力加速度、容器半径、粘性係数の影響を受け、速度分布は半径比に依存することがわかる。

図1は、半径比を0.9としたときの無次元速度分布の様子を可視化したものである。下向き速度は、半径が0.9に位置する落下シリンダー内壁近傍のみであり、それ以外の大部分では上昇流が生じていることがわかる。

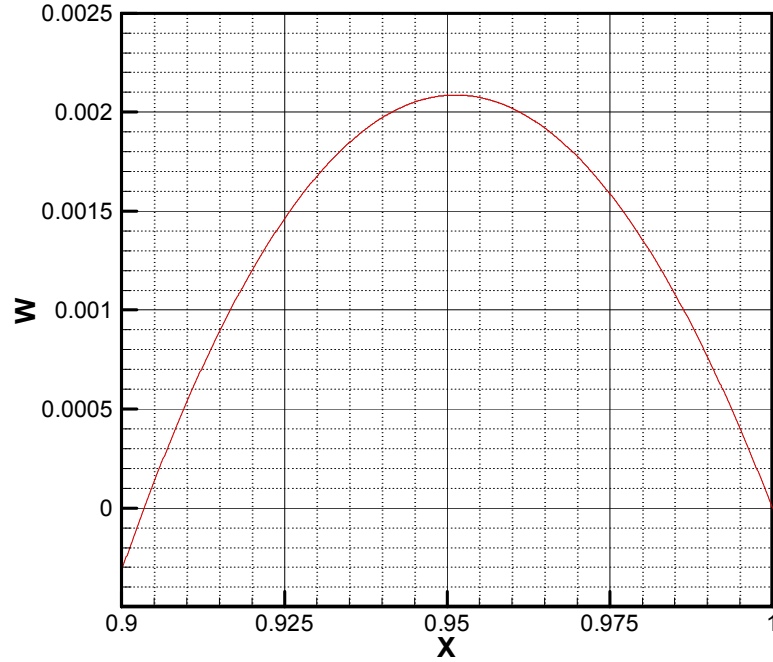


図1 無次元速度分布 ( $\kappa = 0.9$ )

## 付録

$$\mu = -\kappa^2 \left( \frac{1-\kappa^2}{1+\kappa^2} + \ln \kappa \right) \frac{(\rho_C - \rho) g R^2}{2U} \quad (15)$$

今、 $1-\kappa = \varepsilon$  と置く。

$$\begin{aligned} -\kappa^2 \left( \frac{1-\kappa^2}{1+\kappa^2} + \ln \kappa \right) &= -\kappa^2 \left( \frac{(1-\kappa)(1+\kappa)}{1+\kappa^2} + \ln \kappa \right) \\ &= -(1-\varepsilon)^2 \left( \frac{\varepsilon(2-\varepsilon)}{1+(1-\varepsilon)^2} + \ln(1-\varepsilon) \right) = -(1-\varepsilon)^2 \left( \frac{\varepsilon(2-\varepsilon)}{2-2\varepsilon+\varepsilon^2} - \left( \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \frac{1}{4}\varepsilon^4 + \frac{1}{5}\varepsilon^5 + O[\varepsilon^6] \right) \right) \\ &= (1-\varepsilon)^2 \frac{-2\varepsilon + \varepsilon^2 + (2-2\varepsilon + \varepsilon^2) \left( \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \frac{1}{4}\varepsilon^4 + \frac{1}{5}\varepsilon^5 + O[\varepsilon^6] \right)}{2-2\varepsilon+\varepsilon^2} \end{aligned}$$

分子の第3項は、

$$(2-2\varepsilon+\varepsilon^2)\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{3}\varepsilon^3+\frac{1}{4}\varepsilon^4+\frac{1}{5}\varepsilon^5+O[\varepsilon^6]\right)=2\varepsilon-\varepsilon^2+\frac{2}{3}\varepsilon^3+\frac{1}{3}\varepsilon^4+\frac{7}{30}\varepsilon^5+O[\varepsilon^6]$$

したがって,

$$\begin{aligned} -\kappa^2\left(\frac{1-\kappa^2}{1+\kappa^2}+\ln\kappa\right) &= \frac{(1-\varepsilon)^2\left(\frac{2}{3}\varepsilon^3+\frac{1}{3}\varepsilon^4+\frac{7}{30}\varepsilon^5+O[\varepsilon^6]\right)}{2-2\varepsilon+\varepsilon^2} \\ &= \frac{\frac{2}{3}\varepsilon^3+\frac{1}{3}\varepsilon^4+\frac{7}{30}\varepsilon^5+O[\varepsilon^6]}{2-2\varepsilon+\varepsilon^2} - 2\varepsilon\frac{\left(\frac{2}{3}\varepsilon^3+\frac{1}{3}\varepsilon^4+O[\varepsilon^5]\right)}{2-2\varepsilon+\varepsilon^2} + \varepsilon^2\frac{\left(\frac{2}{3}\varepsilon^3+O[\varepsilon^4]\right)}{2-2\varepsilon+\varepsilon^2} \\ &= \frac{\frac{2}{3}\varepsilon^3+\frac{1}{3}\varepsilon^4+\frac{7}{30}\varepsilon^5-\frac{4}{3}\varepsilon^4-\frac{2}{3}\varepsilon^5+\frac{2}{3}\varepsilon^5+O[\varepsilon^6]}{2-2\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{\frac{2}{3}\varepsilon^3-\varepsilon^4+\frac{7}{30}\varepsilon^5+O[\varepsilon^6]}{2-2\varepsilon+\varepsilon^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{2}{3}\varepsilon^3-\varepsilon^4+\frac{7}{30}\varepsilon^5}{2-2\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^3}{3}\frac{2-3\varepsilon+\frac{7}{10}\varepsilon^2}{2-2\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^3}{3}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{13}{20}\varepsilon^2+\frac{-\frac{4}{5}\varepsilon^3+\frac{13}{20}\varepsilon^4}{O[\varepsilon^3]}\right)$$

したがって, 式(15)は

$$\mu \cong \frac{(\rho_c - \rho)gR^2\varepsilon^3}{6U}\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{13}{20}\varepsilon^2 + \dots\right) \quad (16)$$

#### 参考文献

(1) R. Byron Bird, Warren E. Stewart, and Edwin N. Lightfoot, "Transport Phenomena (Second Edition)", p.70.