

自由界面流れの数値計算法について

1 界面捕捉法

1.1 支配方程式

本稿では、気液または液液の二相界面を有する流れ、液滴・気泡の変形や移動を数値流体力学 (Computational Fluid Dynamics) 的に取り扱う。二相流れの計算手法は多数提案されているが、本稿では固定された格子上で差分計算する、いわゆる界面捕捉法を紹介する。流体は、気相、液相ともに非圧縮性のNewton 流体で互いに混合せず、また粘性散逸は無視でき等温場が成り立つものと仮定する。支配方程式は、総和規約を用いて以下のように表される。

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} + f_i \quad (1.3)$$

ここで、(1.3)において、右辺第二項は粘性応力テンソルの発散を表す。また、(1.3)の中の密度 ρ や粘度 μ の値は、流体1か流体2であるかに依存して、異なることに注意しなければならない。なお、右辺第三項は一般外力項であり、界面に働く力、重力や電磁力などを想定している。等温場を仮定する場合には、基本的にはこれら3つの方程式を計算すればよい。等温の单相流解析と違うところは、(1.2)を含むか否かということである。二相流解析の難しいところは、(1.2)の密度の移流方程式をいかにして界面の数値拡散を防ぎながら、時間発展させていくかということに集約される。二相流計算の初期条件として、たとえ界面（密度の急激な変化として表される）がはっきりしていても、(1.2)を時間発展させて差分計算する過程でだんだんと界面における密度勾配が緩やかになってくる。これが数値拡散である。流体1と流体2の区別は、密度 ρ を直接用いても可能であるが、ここでは流体の種類を判別するための関数を導入する。これをカラー関数 ϕ と名付ける。このカラー関数の移流方程式は、(1.2)と同じ形式で下記のように表される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0 \quad (1.4)$$

カラー関数 ϕ の値の定義はいろいろ考えられるが、ここでは、流体1（液相）で -0.5 、流体2（気相）で 0.5 をとるように定義する。つまり、密度 ρ とカラー関数 ϕ の関係式を次式で与える。したがって、 ϕ は無次元の密度とも解釈できる。

$$\phi = - \frac{\rho - 0.5(\rho_L + \rho_G)}{\rho_L - \rho_G}, \quad \text{or} \quad \rho = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_G) - (\rho_L - \rho_G)\phi \quad (1.5)$$

ここで、下付添え字 L, G はそれぞれ、液相(Liquid)、気相(Gas)を表すものとする。(1.4)は、(1.5)を(1.2)に代入すれば得られる。さて、(1.4)によって、カラー関数の移流方程式を解いても、ある程度の数値拡散は避けられない。この式自体は、双曲型の微分方程式であり、通常は風上差分法によって解かれる。したがって、界面の性質を保持しながら、界面のぼやけを極力抑えるような手法が望まれる。そのような手法として、VOF 法¹⁾、レヴェルセット法²⁾、MARS 法³⁾、CIP 法⁴⁾

などが提案されており，それらを組み合わせた手法⁵⁾も可能である．

二相流計算でもう一つの大きな問題は，界面張力の見積もりである．界面張力そのものは，文字通り界面を接線方向に引っ張る力であり，小さな液滴や気泡が球形になろうとするのは，この表面張力のせいである．表面張力は本来，二相界面において単位長さあたりに働く接線力であるが，温度が均一である場合には，接線方向の力は完全に打ち消しあい，結果として界面の局所平均曲率に応じて，法線方向の見かけ上の力だけが残る．界面における単位面積あたりに働く法線方向の力の大きさ f_s [N/m²] は，次のように表される．ただし，下付の s は，*surface force* (面積力) を表すものとする．

$$f_s = \gamma\kappa \quad (1.6)$$

ここで， γ は界面張力[N/m]， κ は局所平均曲率[m⁻¹]を表す．本来，界面は物理的に不連続であるので，界面の両側において流体の圧力に跳び (ジャンプ) が生じる．静止流体を考えるならば，球形の液滴や気泡の内圧は外圧より高く，その圧力ジャンプは， $\gamma\kappa$ である．しかしながら，固定メッシュを用いた差分法で(1.4)を計算すると界面がぼやけ，連続的に変化する有限の幅を持った遷移域が形成される．あるいは，初めから一定の遷移域を持たせた手法とする場合も多い．このような場合，表面張力によってもたらされる界面での圧力のジャンプを採用することは不適切である．Brackbillら⁶⁾の提案した CSF (Continuum Surface Force) モデルでは，表面張力によりもたらされる応力はこの遷移域全体に対して分布的に作用するものであると考え，遷移域を横切ったときの法線力の積分値が，本来の不連続界面での圧力ジャンプと等しくなるように設定される．ただし，遷移域の界面厚さは，曲率半径と比べて十分に小さいことが要求される．したがって，遷移域の局所部分での法線力の次元は[N/m³]でなければならない．遷移域に作用する法線力は，例えばカラー関数 ϕ を用いれば，次式のように与えられる．

$$\vec{f}_v = \gamma\kappa\vec{\nabla}\phi \quad (1.7)$$

ここで， f の下付の v は，*volume force* (体積力) を表すものとする．もし，レベルセット関数 ϕ (界面からの符号付きの距離で $\phi=0$ が界面を表す) を使って表現するなら，法線力は Dirac のデルタ関数を使って

$$\vec{f}_v = \gamma\kappa \underbrace{\delta(\phi)\vec{\nabla}\phi}_{\vec{\nabla}\phi} \quad (1.8)$$

と与えられる．(1.7)と(1.8)を見比べることにより， $\phi(\phi)$ は Heaviside のステップ関数と解釈することもできる．今，(1.8)を界面遷移域に渡って積分すると，

$$f_s = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}_v \cdot d\vec{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma\kappa\delta(\phi)\vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma\kappa\delta(\phi)d\phi = \gamma\kappa \quad (1.9)$$

(1.6)に一致することが確かめられる．ただし，最後の等号の成立理由は，Diracのデルタ関数の性質の利用および積分区間に渡って κ を定数とみなしているからである．さて，(1.7)あるいは(1.8)を(1.3)に組み込めば，界面張力の影響を取り込んだCFD計算ができるが，まだ界面曲率 κ をどう評価するかという問題が残っている．その簡易な方法として，界面の局所平均曲率 κ は，次式のように，界面法線方向単位ベクトル \vec{n} の発散を取ることで得られる．

$$\kappa = -\vec{\nabla} \cdot \vec{n} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla}\phi}{|\vec{\nabla}\phi|} \right) = -\nabla^2\phi, \quad (\because |\vec{\nabla}\phi|=1) \quad (1.10)$$

法線方向単位ベクトル \vec{n} をカラー関数 φ あるいはレベルセット関数 ϕ で表現することは都合が良い。カラー関数（あるいはレベルセット関数）の符号（正負）の定義の仕方により、曲率および関数の勾配値の正負が同時に反転するので、それらは相殺されることになる。したがって、(1.7)あるいは(1.8)のように界面法線力を定義しておけば、関数の符号（正負）に注意を払う必要はない。今、 φ の下付添え字 x は、 x による偏微分を表すものとして、例えば 2次元 x - z デカルト座標系において詳しく展開すると、平均曲率 κ は以下のように表せる。

$$\kappa = \frac{-1}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_z^2}} \left[\varphi_{xx} + \varphi_{zz} - \frac{\varphi_x^2 \varphi_{xx} + 2\varphi_x \varphi_z \varphi_{xz} + \varphi_z^2 \varphi_{zz}}{\varphi_x^2 + \varphi_z^2} \right] \quad (1.11)$$

以上(1.1)～(1.11)が、非圧縮、非混合のNewton 流体の二相流解析に必要な式である。

1. 2 二相流計算の無次元数

単相流で温度が均一な場合は、駆動力として外力または動く境界条件が必要である。重力ですら、保存力であるので流体の駆動源にはなり得ない。一方、二相流の場合は、たとえ重力のような外力が与えられなくとも初期条件に依存して、例えば界面張力が駆動源になって、流れが生じる場合がある。もちろん、重力があれば密度の大きい方の流体が下向きに、密度の小さい方の流体が上向きに移動し、最も安定な状態になるように推移する。これは、自然対流と似ており、重力場の二相流れは一種の浮力流れである。主な違いは、スカラー方程式の拡散項の有無、密度差の大小、界面の有無、界面張力が働くかどうかの3点である。二相流では、物性値が気相と液相でそれぞれ別の値をとるので、これらの比として無次元数が現れる。それ以外の無次元数は、運動方程式の各項の比で、Reynolds 数、Froude 数、Weber 数が代表的なものである。

2 解析例

2. 1 回転円筒容器内の自由表面流れ⁷⁾

図2.1に示されるように、半径 a 、高さ h の密閉円筒容器に水を半分ほど入れ、流れが完全に静止した状態から、急に一定角速度 Ω で容器を中心軸周りに回転させると、上下面や側面に引きずられることにより流体自身も回転を始める。最初、容器内の流体は周方向の速度成分しか持たないが、容器の底面付近では、遠心力により半径方向の速度成分が誘起され、それが側壁に到達した後、側壁を上昇する流れが生じる。この流れは、主流である周方向の流れとは直交する流速成分を持ち、二次流れと呼ばれる。この二次流れは、容器内の流体が単相であろうが二相であろうが起きる現象である。二相の場合は、下にある水が空気よりも密度が大きいので、容器が回転すると、水は遠心力で外側に集まる。時間が十分に経過すれば、最終的には水の角速度が容器の角速度と一致し、そのときの自由表面の形状は回転放物面になることが知られている。しかしながら、この回転放物面に推移するまでの過渡的な状況においては、自由表面の形状や内部流動については必ずしも自明でない。これを計算するには、例えば HSMAC法を用いた解析を二相流体に当てはめ、あたかも単相流の計算であるかのように行えば良い。表面張力も考慮するとき、無次元支配方程式（軸対称の円筒座標系）は以下ようになる。ただし、 U は半径方向速度成分、 V は周方向速度成分、 W は軸方向速度成分とし、 ϕ は界面からの無次元の距離関数とする。

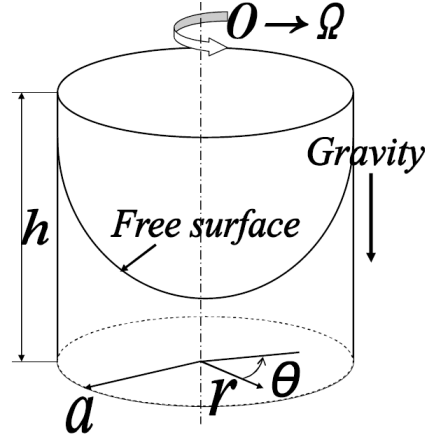


図2.1 回転密閉円筒容器内の自由表面流れの解析モデル図

$$\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{U}{R} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial R} + W \frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{V^2}{R} = & -\frac{1}{\rho_\phi} \frac{\partial P}{\partial R} - \frac{1}{\rho_\phi} \frac{1}{We} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} \right) \frac{\partial H_\varepsilon(\Phi)}{\partial R} \\ & + \frac{E}{\rho_\phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial R} \left(2\mu_\phi \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{2\mu_\phi}{R} \left(\frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\mu_\phi \frac{\partial U}{\partial Z} + \mu_\phi \frac{\partial W}{\partial R} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial R} + W \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{UV}{R} \\ = \frac{E}{\rho_\phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial R} \left(\mu_\phi \frac{\partial V}{\partial R} - \mu_\phi \frac{V}{R} \right) + \frac{2\mu_\phi}{R} \left(\frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\mu_\phi \frac{\partial V}{\partial Z} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \tau} + U \frac{\partial W}{\partial R} + W \frac{\partial W}{\partial Z} = & -\frac{1}{\rho_\phi} \frac{\partial P}{\partial Z} - \frac{1}{\rho_\phi} \frac{1}{We} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} \right) \frac{\partial H_\varepsilon(\Phi)}{\partial Z} \\ & + \frac{E}{\rho_\phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial R} \left(\mu_\phi \frac{\partial W}{\partial R} + \mu_\phi \frac{\partial U}{\partial Z} \right) + \frac{\mu_\phi}{R} \left(\frac{\partial W}{\partial R} + \frac{\partial U}{\partial Z} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(2\mu_\phi \frac{\partial W}{\partial Z} \right) \right\} - \frac{1}{Fr^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Phi}{\partial R} + W \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = 0 \quad (2.5)$$

無次元の変数と無次元数は以下のように与えられる。

$$\tau = \frac{t}{1/\Omega}, \quad (R, Z) = \frac{(r, z)}{a}, \quad (U, V, W) = \frac{(u, v, w)}{a\Omega}, \quad P = \frac{p}{\rho_G a^2 \Omega^2}, \quad \Phi = \frac{\phi}{a} \quad (2.6)$$

$$E = \frac{\mu_G}{\Omega a^2 \rho_G}, \quad Fr = \Omega \sqrt{\frac{a}{g}}, \quad We = \frac{\rho_G a^2 \Omega}{\gamma}, \quad \hat{\rho} = \frac{\rho_L}{\rho_G}, \quad \hat{\mu} = \frac{\mu_L}{\mu_G} \quad (2.7)$$

界面遷移域における無次元の密度および粘度については、無次元距離関数を用いて、以下のよう
に与えるものとする。

$$\begin{aligned}\rho_\phi &= \frac{\rho}{\rho_G} = \frac{1}{2}(\hat{\rho}+1) - (\hat{\rho}-1)H_\varepsilon(\Phi) \\ \mu_\phi &= \frac{\mu}{\mu_G} = \frac{1}{2}(\hat{\mu}+1) - (\hat{\mu}-1)H_\varepsilon(\Phi)\end{aligned}\tag{2.8}$$

ここで, $H_\varepsilon(\Phi)$ は均されたステップ関数を表し, ここでは $\varepsilon = 1.5(\Delta R)$ としている. $H_\varepsilon(\Phi)$ の定義は次式に示される.

$$H_\varepsilon(\Phi) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \Phi \leq -\varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} \left[\Phi + \frac{\varepsilon}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\Phi}{\varepsilon}\right) \right], & -\varepsilon \leq \Phi \leq \varepsilon \\ \frac{1}{2}, & \varepsilon \leq \Phi \end{cases}\tag{2.9}$$

初期条件と境界条件は,

$$U = V = W = 0, \quad \Phi = Z - 1 \quad \text{at} \quad \tau \leq 0\tag{2.10}$$

$$\begin{cases} U = W = 0, \quad V = R, \quad \partial\Phi/\partial Z = 0 & \text{at} \quad Z = 0, 2 \\ U = W = 0, \quad V = 1, \quad \partial\Phi/\partial R = 0 & \text{at} \quad R = 1 \\ U = V = \partial W/\partial R = 0, \quad \partial\Phi/\partial R = 0 & \text{at} \quad R = 0 \end{cases}\tag{2.11}$$

現れる無次元数は, Ekman 数 (= 回転 Reynolds 数の逆数) と Froude 数の2つに加えて, 液相と気相の密度比ならびに粘度比である. ここで, これらの無次元数や物性値比には, 気相の値を参照量として用いていることに注意する. 例えば, HSMAC法を使って計算するときに必要な圧力および速度の反復修正式は, 以下のように与えられる. 添字 m, n, i, k は, それぞれ反復回数, 時間ステップ, 半径方向位置, 軸方向位置を表す.

$${}^{m+1}P_{i,k}^{n+1} = {}^m P_{i,k}^{n+1} + \frac{-\left(\frac{{}^m U_{i,k}^{n+1} - {}^m U_{i-1,k}^{n+1}}{\Delta R} + \frac{{}^m U_{i,k}^{n+1} + {}^m U_{i-1,k}^{n+1}}{2R_i} \frac{{}^m W_{i,k}^{n+1} - {}^m W_{i,k-1}^{n+1}}{\Delta Z}\right)}{\underbrace{\frac{\Delta\tau}{(\Delta R)^2} \left(\frac{1}{\rho_{\phi_{i^+,k}}} + \frac{1}{\rho_{\phi_{i^-,k}}}\right) + \frac{\Delta\tau}{2(\Delta R)R_i} \left(\frac{1}{\rho_{\phi_{i^+,k}}} - \frac{1}{\rho_{\phi_{i^-,k}}}\right) + \frac{\Delta\tau}{(\Delta Z)^2} \left(\frac{1}{\rho_{\phi_{i,k^+}}} + \frac{1}{\rho_{\phi_{i,k^-}}}\right)}_{m(\delta P)_{i,k}^{n+1}}}\tag{2.12}$$

$${}^{m+1}U_{i,k}^{n+1} = {}^m U_{i,k}^{n+1} + \frac{\Delta\tau}{\rho_{\phi_{i^+,k}}(\Delta R)} \cdot {}^m (\delta P)_{i,k}^{n+1}\tag{2.13}$$

$${}^{m+1}U_{i-1,k}^{n+1} = {}^m U_{i-1,k}^{n+1} - \frac{\Delta\tau}{\rho_{\phi_{i^-,k}}(\Delta R)} \cdot {}^m (\delta P)_{i,k}^{n+1}\tag{2.14}$$

$${}^{m+1}W_{i,k}^{n+1} = {}^m W_{i,k}^{n+1} + \frac{\Delta\tau}{\rho_{\phi_{i,k^+}}(\Delta Z)} \cdot {}^m (\delta P)_{i,k}^{n+1}\tag{2.15}$$

$${}^{m+1}W_{i,k-1}^{n+1} = {}^m W_{i,k-1}^{n+1} - \frac{\Delta\tau}{\rho_{\phi_{i,k^-}}(\Delta Z)} \cdot {}^m (\delta P)_{i,k}^{n+1}\tag{2.16}$$

ここで, $\rho_{\phi_{i^+,k}}$ は, $\rho_{\phi_{i,k}}$ と $\rho_{\phi_{i+1,k}}$ の中点 ($U_{i,k}$ の定義点) における無次元密度を表す. 他も同様

である．これらの密度の値については，距離関数の値からその補間値を出し，式(2.8)に基づいて求める．なお，移流項の離散化には三次精度の風上差分法を用いている．

表2.1に今回実施した解析条件を示す．図2.2に解析結果の可視化を示す．時間経過とともに界面は大きく変形し，二次流れは徐々に弱くなることを確認できる．十分に時間経過した後は，界面形状の時間変化は全く無くなり，回転放物面となる．このとき流体は剛体回転しており，二次流れは消失する．

表2.1 解析条件

パラメータ	値
Ekman数, E	10^{-3}
Froude数, Fr	1.5
Weber数, We	∞
密度比	800
粘度比	500

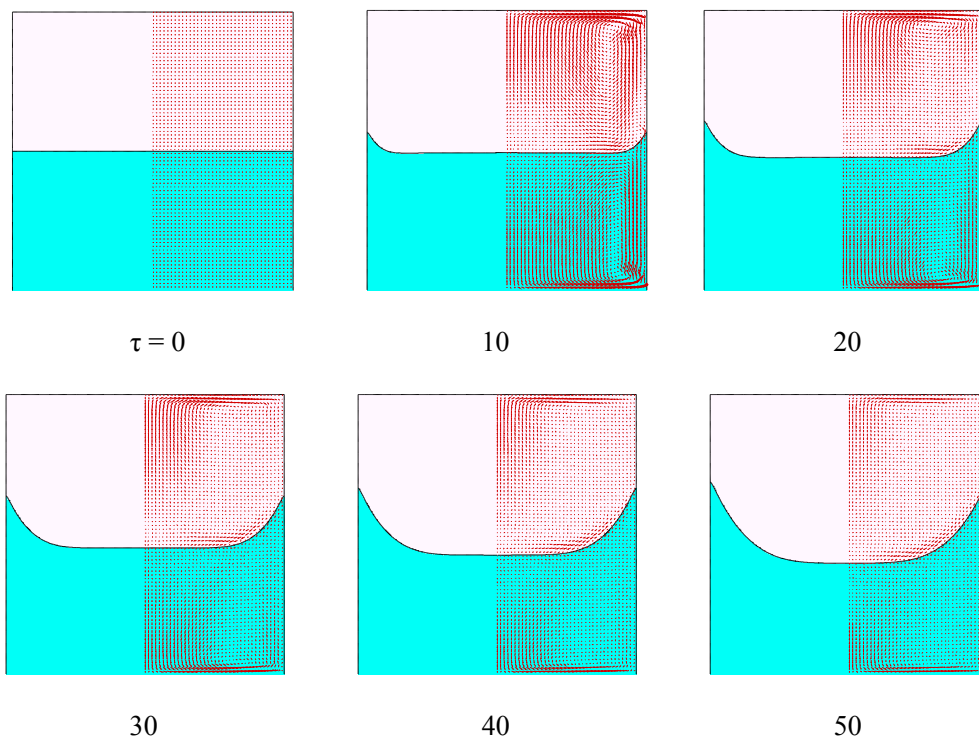


図2.2 気液界面形状と二次流れの速度ベクトル(右半分)，無次元時刻はそれぞれ $\tau = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ ．

2.2 二次元ダムブレイク⁸⁾

次に，重力支配の現象について触れる．図2.3のように，重力場で，矩形容器の中に堰がありその左側に水が保持されているものとする．時刻0で，堰が崩壊した後の過渡的現象を計算しようとすれば，カラー関数を用いて，2次元デカルト直交座標系で以下のように書ける．

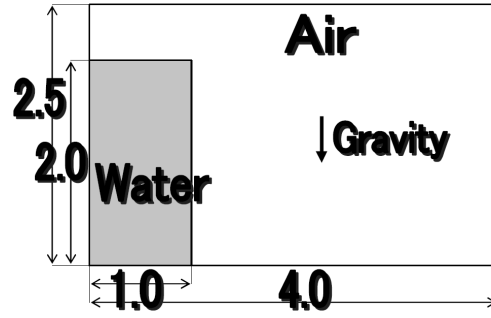


図2.3 水柱の崩壊⁸⁾. 水密度 1000 kg/m^3 , 空気密度 1.25 kg/m^3 , 水の粘度 $10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, 空気の粘度 $2 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, 重力加速度 9.8 m/s^2 , 表面張力 0.072 N/m , 容器サイズは, 縦 12.5 cm ×横 20 cm

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = & -\frac{1}{\rho_\phi} \frac{\partial P}{\partial X} \\ & + \frac{1}{\rho_\phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(2\mu_\phi \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\mu_\phi \frac{\partial U}{\partial Z} + \mu_\phi \frac{\partial W}{\partial X} \right) \right\} + F_x \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \tau} + U \frac{\partial W}{\partial X} + W \frac{\partial W}{\partial Z} = & -\frac{1}{\rho_\phi} \frac{\partial P}{\partial Z} \\ & + \frac{1}{\rho_\phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu_\phi \frac{\partial W}{\partial X} + \mu_\phi \frac{\partial U}{\partial Z} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(2\mu_\phi \frac{\partial W}{\partial Z} \right) \right\} - G + F_z \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + U \frac{\partial \phi}{\partial X} + W \frac{\partial \phi}{\partial Z} = 0 \quad (2.20)$$

ただし, 式中の F_x , F_z は界面法線力項を表し, 具体的には, 以下のように表される.

$$\vec{F} = -\frac{\Gamma}{\rho_\phi} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla} \phi}{|\vec{\nabla} \phi|} \right) \vec{\nabla} \phi \quad (2.21)$$

無次元の変数と無次元数は以下のように与えられる.

$$(X, Z) = \frac{(x, z)}{l}, \quad (U, V, W) = \frac{(u, w)}{\mu_G / (\rho_G l)}, \quad P = \frac{p}{\mu_G^2 / (\rho_G l^2)}, \quad \tau = \frac{t}{(\rho_G l^2) / \mu_G} \quad (2.22)$$

$$G = \frac{g \rho_G^2 l^3}{\mu_G}, \quad \Gamma = \frac{\gamma \rho_G l}{\mu_G^2}, \quad \hat{\rho} = \frac{\rho_L}{\rho_G}, \quad \hat{\mu} = \frac{\mu_L}{\mu_G} \quad (2.23)$$

ここでは, 代表速度が未知であるので, それぞれ気相の物性値に基づいたGalilei数 G とLaplace数 Γ を無次元数として用いている. ラプラス数 Γ は(表面張力)(慣性力)/(粘性力)² に相当する.

界面遷移域における無次元の密度および粘度については、カラー関数を用いて、以下のように与えるものとする。

$$\rho_\phi = \frac{\rho}{\rho_G} = \frac{1}{2}(\hat{\rho}+1) - (\hat{\rho}-1)\phi$$

$$\mu_\phi = \frac{\mu}{\mu_G} = \frac{1}{2}(\hat{\mu}+1) - (\hat{\mu}-1)\phi$$
(2.24)

計算条件は、図2.3のキャプションに示される通りであるが、ここでは、水の初期形状の一辺長として5 cmを想定している。このサイズが大きくなればなるほど、 Γ より G がずっと大きくなり、表面張力支配から重力支配へと移行する。本計算では、両方の効果を取り入れて計算している。図2.4は、水が崩壊していく過渡的な様子を示す。計算開始直後の1枚目の図では、まず水の角の部分が表面張力の効果により丸められるが、時間が進行していくにつれて、重力の効果がより支配的であるのが見てとれる。底面における水の先端位置は、右に移動して行き、対向壁に到達後、水は慣性の影響で壁を上昇していく。なお、壁面における水の接触角については、カラー関数 ϕ の法線方向の勾配をゼロとしているので、90度と設定していることに相当する。



図2.4 水柱の崩壊の様子 ($G = 4.79 \times 10^6$, $\Gamma = 1.17 \times 10^7$, 密度比 = 800, 粘度比 = 50)
 (a) $\tau = 0.0001$, (b) $\tau = 0.0008$, (c) $\tau = 0.0016$ ⁸⁾

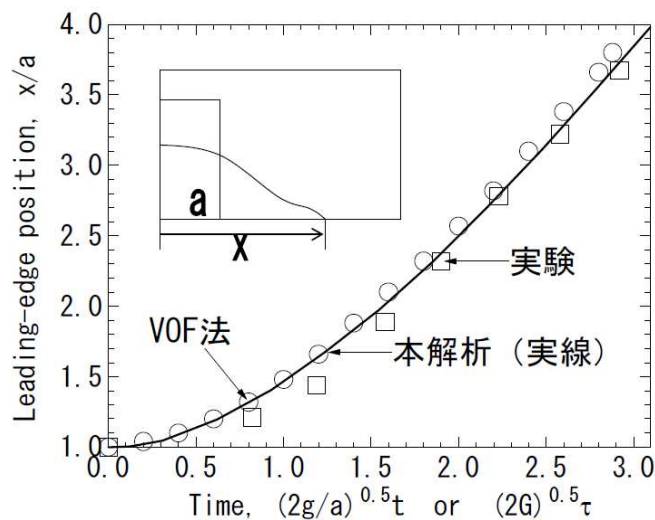


図2.5 水先端位置の時間変化 ($G = 4.79 \times 10^6$, $\Gamma = 1.17 \times 10^7$, 密度比 = 800, 粘度比 = 50),
 実線(本解析)⁸⁾, ○印はVOF¹⁾, □印は実験⁹⁾

この計算結果が定量的に正しいかどうかを判断するために、他の研究者による既存の実験値⁹⁾ならびに計算値¹⁾と比較したものが、図2.5である。横軸は無次元時間であり、縦軸は無次元の水の先

端位置を示す。代表長さは、初期の水の幅をとっているのので、縦軸は4までである。ラプラス数 Γ の影響が無視できる程度の比較的大きなサイズであれば、ほぼガリレイ数 G のみに依存すると考えられ、本計算結果は5 cm×10 cmサイズの水ではあるが、既往の研究データと定量的一致を示していると考えられる。

2.3 液滴の変形⁸⁾

ここまで円筒座標系とデカルト座標系での二次元計算例を挙げたが、三次元計算への拡張は比較的容易である。基礎式、無次元化ともに、先ほどのダムブレークと本質的に同じである。ただ計算メッシュ数が格段に多くなるので、各方向のメッシュ数や時間刻み幅については、計算前に見積もっておかないと、計算に多大な時間を要することになる。計算例として、図2.6に、最初、立方体の形をした液滴が無重力場で静かに放たれた場合を取り上げる。表面張力を計算に組み込むので、曲率の大きな部分が内側に入り込んでいくように、あるいは液滴の表面積が小さくなるように液滴の振動が始まり、界面の変形運動が起きる。途中までしか示していないが、液滴は角のとれた正六面体と正八面体の交互の振動を繰り返しながら振動し、粘性により徐々に液滴の運動エネルギーが失われ、最後には球形になり静止する。

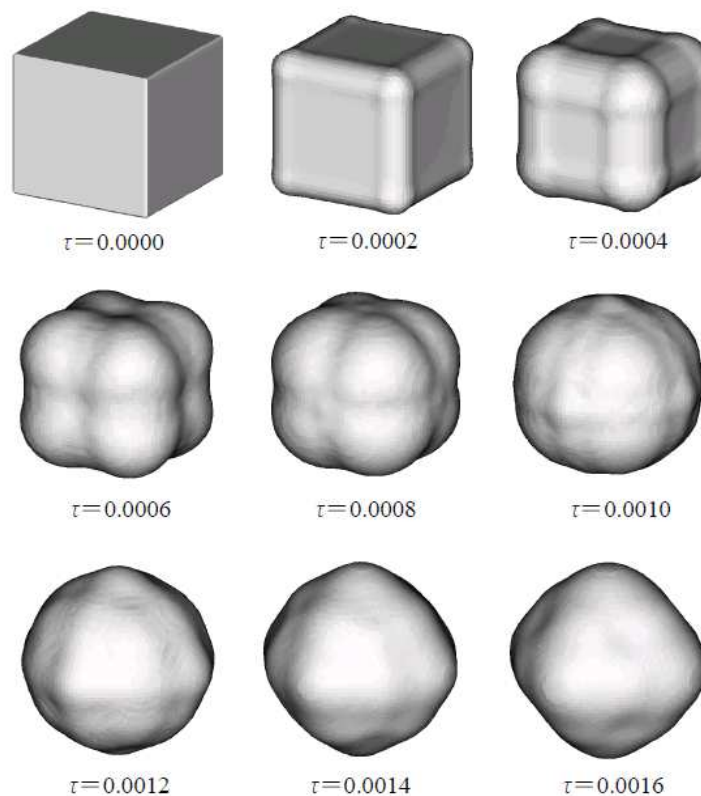


図2.6 無重力場で振動する液滴 ($\Gamma = 5 \times 10^5$, 密度比 = 100, 粘度比 = 10) 各図の無次元時間の間隔は $\Delta \tau = 0.0002$ ⁸⁾

参考文献

- 1) C.W. Hirt and B.D. Nichols, "Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries", *J. Computational Phys.*, **39**, 201-225 (1981)

- 2) M. Sussman, P. Smereka and S. Osher, "A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flows", *J. Computational Phys.*, **114**, 146-159 (1994)
- 3) T. Kunugi, "Direct numerical algorithm for multiphase flow with free surfaces and interfaces", *Transaction of the JSME, Part B*, **63**(609), 1576-1584 (1997)
- 4) 矢部 孝, 尾形陽一, 内海隆行, CIP 法-原子から宇宙までを解くマルチスケール解法, 森北出版, 2003
- 5) T. Himeno, T. Watanabe, S. Nonaka, Y. Naruo and Y. Inatani, "Numerical analysis of sloshing and wave breaking in a small vessel by CIP-LSM", *JSME Int. Journal, Series B*, **47**(4), 709-715, (2004)
- 6) J.U. Brackbill, D.B. Kothe and C. Zemach, "A Continuum method for modeling surface tension", *J. Computational Phys.*, **100**, 335-354 (1992)
- 7) T. Tagawa and H. Ozoe, "Effect of external magnetic field on various free-surface flow", *Progress in Computational Fluid Dynamics*, **8**(7-8), 461-468 (2008)
- 8) T. Tagawa, "Numerical simulation of liquid metal free-surface flows in the presence of a uniform static magnetic field", *ISIJ International*, **47**(4), 574-581 (2007)
- 9) S. Koshizuka and Y. Oka, "Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid", *Nuclear Science and Engineering*, **123**(3), 421-434 (1996)