

振動平板上の流れ

非定常な流れとして、時間的に周期性を持つ振動的流れを考える。無限に広い平板が x 軸方向に最大速度 U で単振動する。このとき、基礎方程式は、

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2}, \quad (y \geq 0) \quad (1)$$

と与えられる。

境界条件は、

$$y=0: \quad u(0,t) = U \cos(\omega t) \quad (2)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad u(\infty,t) \rightarrow 0 \quad (3)$$

ここで、 u [m/s] は求めるべき速度であり、 ω [rad/s] は振動平板の角振動数である。境界条件は、式(2), (3)で与えられたものの、初期条件の議論がないのには若干の注意が必要である。この問題の場合、どんな初期条件であっても十分に時間が経過した後は、流体の運動は周期的であることを想定する。つまり、任意の初期条件から十分に時間が経過した後の周期的な流体の流れに着目する。これらの境界条件を満たす振動解を次のように仮定する（このように仮定する理由は、また式(2)の境界条件が振動しているため、三角関数が出てきたら、オイラーの関係式があるので、指数関数を用いるのが便利）。

$$u(y,t) = \Re \left[\tilde{u}(y) \cdot e^{i\omega t} \right] \quad (4)$$

ここに、 i は虚数単位であり、 \Re は実数部分をとることを意味する。 \tilde{u} は y を変数とする複素関数である。つまり、

$$\tilde{u}(y) = \tilde{u}_r(y) + i\tilde{u}_i(y) \quad (5)$$

と実部と虚部から成る。式(1)における速度を、 $\tilde{u}(y) \cdot e^{i\omega t}$ として代入すると、

$$\text{左辺: } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{u} e^{i\omega t}) = i\omega e^{i\omega t} \tilde{u}, \quad \text{右辺: } \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\tilde{u} e^{i\omega t}) = \nu \frac{d^2 \tilde{u}}{dy^2} e^{i\omega t}$$

と計算できる。したがって、式(1)は、次式となる。

$$i\omega e^{i\omega t} \tilde{u} = \nu \frac{d^2 \tilde{u}}{dy^2} e^{i\omega t}$$

整理すると、次の常微分方程式を得る。

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dy^2} - \left(\frac{i\omega}{\nu} \right) \tilde{u} = 0 \quad (6)$$

この常微分方程式の境界条件は以下のように与えられる。

$$y=0: \quad \tilde{u}(0) = U \quad (7)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad \tilde{u}(\infty) \rightarrow 0 \quad (8)$$

この方程式の一般解は、2つの定数を用いて次のように表すことができる。

$$\tilde{u}(y) = C_1 e^{\lambda y} + C_2 e^{-\lambda y}, \quad \lambda = \sqrt{i\omega/\nu} \quad (9)$$

次に、 λ を簡略化する。次式が成り立つので

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \quad (10)$$

式(9)は次式のように書き換えられる。

$$\tilde{u}(y) = C_1 e^{k(1+i)y} + C_2 e^{-k(1+i)y}, \quad k = \sqrt{\omega/2\nu} > 0 \quad (11)$$

ここに、 k は波数で[m⁻¹]の次元を持つ。境界条件(8)より、式(11)が発散しないためには $C_1 = 0$ である必要があり、また境界条件(7)より $C_2 = U$ となる。よって式(11)は

$$\tilde{u}(y) = U e^{-k(1+i)y} \quad (12)$$

となる。結局、式(4)に代入して次のようになる。

$$u(y,t) = \Re \left[U e^{-k(1+i)y} e^{i\omega t} \right] = \Re \left[U e^{-ky} e^{i(\omega t - ky)} \right] = U e^{-ky} \cos(\omega t - ky) \quad (13)$$

無次元速度は次式となる。

$$u/U = e^{-ky} \cos(\omega t - ky) \quad (14)$$

指数関数にかかる k は減衰定数と呼ばれる。減衰定数および波数はともに $k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$ である。

したがって、1 波長 ($2\pi/k$) 進む間に、振幅は $e^{-2\pi} \cong 0.002$ 倍に減衰することがわかる。

数値解法

式(6)を式(7)および式(8)の境界条件の下、数値的に解くことを考える。式(6)を実部と虚部分けける。

$$\frac{d^2 \tilde{u}_R}{dy^2} + \frac{\omega}{\nu} \tilde{u}_I = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d^2 \tilde{u}_I}{dy^2} - \frac{\omega}{\nu} \tilde{u}_R = 0 \quad (16)$$

境界条件の式(7), (8)も実部と虚部分けて、

$$y=0: \quad \tilde{u}_R(0) = U, \quad \tilde{u}_I(0) = 0 \quad (17)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad \tilde{u}_R(\infty) \rightarrow 0, \quad \tilde{u}_I(\infty) \rightarrow 0 \quad (18)$$

と書ける。ガウス・ザイデル法などの反復法を用いることより、この数値計算の実行は容易であり、結果を下図 ($k=1$ のとき) に示す。速度の振幅関数の実部 \tilde{u}_R (赤) と虚部 \tilde{u}_I (緑) が求まる。縦軸は無次元速度である。

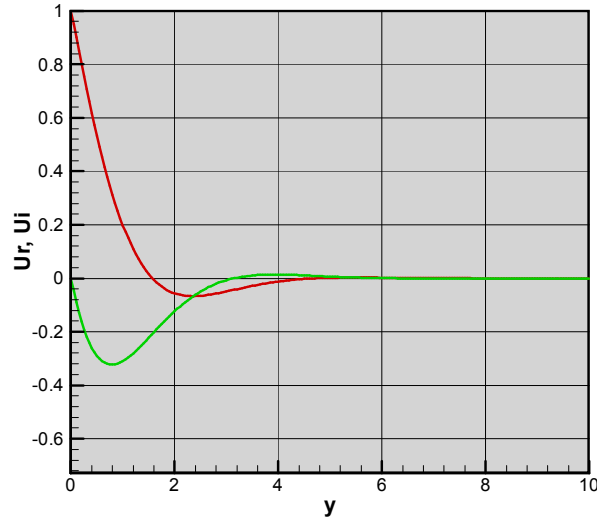


図 1 振幅関数の実部と虚部 ($k=1$)

数値解析の結果，それぞれ 2 曲線の概形を眺めると，以下の式で与えられることが推測される。

$$\tilde{u}_R(y)/U = e^{-ky} \cos(-ky) \quad (19)$$

$$\tilde{u}_I(y)/U = e^{-ky} \sin(-ky) \quad (20)$$

これらは，オイラーの式を用いれば，

$$\frac{\tilde{u}(y)}{U} = \frac{\tilde{u}_R(y) + i\tilde{u}_I(y)}{U} = e^{-ky} e^{-iky} = e^{-(1+i)ky} \quad (21)$$

と一本の式になり，式(12)に一致するのがわかる。

また，式(4)を展開すると，

$$\begin{aligned} u(y,t) &= \Re \left[\tilde{u}(y) \cdot e^{i\omega t} \right] = \Re \left[(\tilde{u}_R(y) + i\tilde{u}_I(y)) \cdot (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \right] \\ &= \tilde{u}_R(y) \cdot \cos(\omega t) - \tilde{u}_I(y) \cdot \sin(\omega t) \\ &= U e^{-ky} \cos(-ky) \cdot \cos(\omega t) - U e^{-ky} \sin(-ky) \cdot \sin(\omega t) \\ &= U e^{-ky} \cos(\omega t - ky) \end{aligned} \quad (22)$$

となり，式(14)に一致するのがわかる。今回取り上げた問題では，理論解も数値解も得られたが，より複雑な場合では必ずしも理論解が得られるとは限らない。そのようなとき，数値解法には大きな利点がある。

問題

問1 式(14)の結果を用いて、 $k=1$ のグラフの概略を描け。

問2 振幅が1%となる y の値を δ とする。 δ を ν 、 ω を使って表せ。
ただし、 $\ln 10 = 2.3$ とする。

問3 振動平板に働く摩擦応力を求めよ。

問4 平板の振動を持続させるのに必要な仕事率（単位面積当たり）を求めよ。

問5 流体内部で発生する摩擦熱を求めよ。

解答

問1 $k=1$ の場合にグラフを描くと以下の図のようになる。一周期を16分割し、描いている。
る。わかりやすくするため、代表で一本だけ赤で表示する。

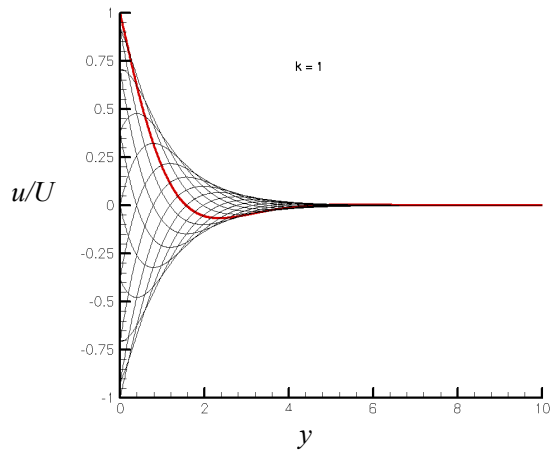
問2 指数関数部分を考える。

$$e^{-k\delta} = 0.01, \quad -k\delta = \ln(0.01)$$

$$\delta = -\frac{\ln(0.01)}{k} = \ln(100) \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

$$\cong 4.6 \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} = \frac{4.6}{k}$$

δ は境界層とみなせる。 δ は、 ν が小さくなるほど薄く、また ω が大きいほど薄くなる。右図で $y = 4.6$ では振幅は1%になる。 $k=2$ になると、 δ は2.3となるので、 y 方向に半分に圧縮したような図になる。



問3 まず速度勾配を計算すると

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U \left(-ke^{-ky} \cdot \cos(\omega t - ky) + e^{-ky} \cdot k \sin(\omega t - ky) \right)$$

$$= Uke^{-ky} \left(-\cos(\omega t - ky) + \sin(\omega t - ky) \right) = \sqrt{2}Uke^{-ky} \sin \left(\omega t - ky - \frac{\pi}{4} \right)$$

摩擦応力は、

$$(\tau_{yx})_{y=0} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \sqrt{2} \mu U k \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) = \rho U \sqrt{\omega \nu} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right)$$

問4 単位面積当たりの仕事率は、摩擦応力に速度を掛ければ求められるから、

$$\begin{aligned} P &= -(\tau_{yx})_{y=0} \cdot U \cos(\omega t) = -\rho U^2 \sqrt{\omega \nu} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos(\omega t) \\ &= -\frac{1}{2} \rho U^2 \sqrt{\omega \nu} \cdot \left(\sin \left(2\omega t - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

一周期の平均をとれば、

$$P_{ave} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \rho U^2 \sqrt{\omega \nu} \quad [\text{W/m}^2]$$

問5 今の場合、粘性による散逸は、 $\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ で与えられる。単位は $[\text{W/m}^3]$ である。

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 &= \mu \left\{ \sqrt{2} U k e^{-ky} \sin \left(\omega t - ky - \frac{\pi}{4} \right) \right\}^2 = 2\mu U^2 k^2 e^{-2ky} \sin^2 \left(\omega t - ky - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \mu U^2 k^2 e^{-2ky} \left[1 - \cos 2 \left(\omega t - ky - \frac{\pi}{4} \right) \right] \end{aligned}$$

時間平均をとると

$$\langle \Phi \rangle = \mu U^2 k^2 e^{-2ky} \quad [\text{W/m}^3]$$

これを無限遠方まで積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \langle \Phi \rangle dy &= \int_0^\infty \mu U^2 k^2 e^{-2ky} dy = \mu U^2 k^2 \int_0^\infty e^{-2ky} dy = \mu U^2 k^2 \left[-\frac{1}{2k} e^{-2ky} \right]_0^\infty \\ &= \mu U^2 k^2 \frac{1}{2k} = \frac{\mu U^2 k}{2} = \frac{\mu U^2}{2} \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \rho U^2 \sqrt{\omega \nu} \quad [\text{W/m}^2] \end{aligned}$$

問4, 5の結果より、平板を振動させるのに投入した時間当たりのエネルギーは、流体の摩擦熱となり散逸されることがわかる。