

回転円板と静止円板間の非圧縮流れの相似解

1. 緒言

静止流体中において無限回転円板により誘起される流れの研究は、von Kármán が流れの相似性（半径に比例して、半径方向と周方向の速度成分が大きくなる）に着目したことにより始まり、その後 Cochran が Navier-Stokes 方程式の数値解を求めている。それとは逆に、一様回転流中の軸に対して直交するように置かれた静止円板近傍に発達する境界層は、Bödewadt *et al.*により初めて調べられ、回転円板近傍の境界層よりも容易に不安定化することが知られている。これらの境界層流れは、Navier-Stokes 方程式の非線形相似厳密解として知られている。一方で、回転二円板間の流れはより複雑で、Batchelor 以降いくつか研究されている。2つの円板が各々異なる角速度で回転する場合が一般性を有すると考えられるが、ここでは、一方が静止で他方のみが一定角速度 ω で回転する場合を想定する。一円板の回転流とは違って、この二円板の隙間流は、半径位置に対して流れ場は相似であるものの、隙間長を基準にした Reynolds 数 ($=\omega d^2/\nu$) に依存して、速度分布が様々に変化するという点で非常に興味深い。ある Reynolds 数以上になると、静止円板近傍に発達する Bödewadt 境界層と回転円板近傍に発達する Kármán 境界層との間のコア領域においては、半径方向速度成分はほぼ 0 になり、弱い軸方向流を伴う一様回転流が観察される。この一様回転流の角速度は、回転円板のそれの約 0.3 倍であることが知られている。本稿では、相似解を仮定したときの回転差のある二円板隙間流について、差分法を用いて解析した結果を示す。

2. 記号

d : 流体層厚さ [m]	Z : 無次元軸方向座標 = z/d [-]
p : 圧力 [Pa]	θ : 周方向角度 [rad]
r : 半径方向座標 [m]	μ : 粘性係数 [Pa·s]
R : 無次元半径方向座標 = r/d [-]	ν : 動粘性係数 = μ/ρ [m ² /s]
Re : レイノルズ数 = $\omega d^2/\nu$ [-]	ρ : 密度 [kg/m ³]
u : 半径方向速度成分 [m/s]	ω : 円板の回転角速度 [rad/s]
U : 無次元半径方向速度成分 = $u/(r\omega)$ [-]	
v : 周方向速度成分 [m/s]	添え字 :
V : 無次元周方向速度成分 = $v/(r\omega)$ [-]	B : Bödewadt 層
w : 軸方向速度成分 [m/s]	c : コア領域
W : 無次元軸方向速度成分 = $w/(\omega d)$ [-]	K : Kármán 層
z : 軸方向座標 [m]	R : 半径方向微分

3. 支配方程式

本研究で想定した解析モデルを図 1 に示す。2枚の円板間距離に比べて十分に大きな半径を持つ2円板に挟まれた流体の流れを考える。

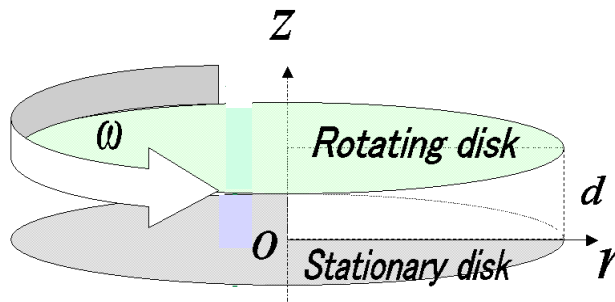


Fig. 1 Schematic of the problem considered

粘性散逸の流れ場への影響は無視できるものとする。流れ場は軸対称であると仮定し、また速度の半径方向および周方向成分が、中心軸からの距離（半径）に比例して大きくなるような相似性のある流れを想定する。差分法を用いた数値解析を行う上では、まず半径方向の圧力勾配を求める必要がある。ただし後述のように、これらの半径方向の圧力勾配は、流れ場の半径方向の相似性を考慮することにより、軸方向には変化せず一定値であることがわかる。以下、解析に必要な基礎式を導出する。本研究では、流体は非圧縮性のニュートン流体であると仮定する。定常軸対称の円筒座標系における連続の式および運動方程式は、次のように書ける。運動方程式中の外力は無いものとする。

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

4. 無次元化

ディスクの半径はギャップよりも十分に大きいと考え相似解を仮定する。次のように無次元変数を置く。

$$Z = \frac{z}{d}, \quad U(Z) = \frac{u(r, z)}{r\omega}, \quad V(Z) = \frac{v(r, z)}{r\omega}, \quad W(Z) = \frac{w(z)}{\omega d}, \quad P(Z) = \frac{p(r, z) - p_1(r)}{\rho\omega^2 d^2} \quad (5)$$

ここで、まず半径方向の圧力勾配を考える。

$$\frac{\partial p(r, z)}{\partial r} = \frac{\partial (\rho\omega^2 d^2 P + p_1)}{\partial r} = \frac{dp_1(r)}{dr} \quad (6)$$

半径方向の運動方程式(2)は、常微分化されて次式のようなになる。

$$U^2 - V^2 + W \frac{dU}{dZ} - \frac{1}{Re} \frac{d^2 U}{dZ^2} = -\frac{1}{\rho\omega^2} \frac{dp_1(r)}{dr} \quad (7)$$

式(7)の左辺は Z のみの関数であり、一方で右辺は半径位置のみの関数である。したがって、両辺のどちらも定数でなければならぬ。次式で与えられるように、無次元の半径方向の圧力勾配は一定値となる。

$$P_R \equiv \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{dp_1(r)}{dr} = \frac{p_r}{\rho\omega^2} = \frac{k_p}{\rho\omega^2} \quad (8)$$

ここに、 p_r は半径方向の圧力勾配であり、半径位置に比例して大きくなることがわかる。 k_p はその比例定数を表している。以上、まとめると常微分化された方程式と境界条件は以下で与えられる。

$$2U + \frac{dW}{dZ} = 0 \quad (9)$$

$$U^2 - V^2 + W \frac{dU}{dZ} = -P_R + \frac{1}{Re} \frac{d^2U}{dZ^2} \quad (10)$$

$$2UV + W \frac{dV}{dZ} = \frac{1}{Re} \frac{d^2V}{dZ^2} \quad (11)$$

$$W \frac{dW}{dZ} = -\frac{dP}{dZ} + \frac{1}{Re} \frac{d^2W}{dZ^2} \quad (12)$$

ディスクと流体の界面における境界条件は、無次元化されて次式となる.

$$\begin{cases} Z=1: U=0, V=1, W=0 \\ Z=0: U=0, V=0, W=0 \end{cases} \quad (13)$$

式(8)により, 圧力 p_1 の値が中心軸上でゼロとすると, それぞれ次式のように求まる.

$$p_1(r) = \frac{1}{2} k_p r^2 \quad (14)$$

したがって, 式(5)は少し修正されて次式となる.

$$Z = \frac{z}{d}, \quad U(Z) = \frac{u(r,z)}{r\omega}, \quad V(Z) = \frac{v(r,z)}{r\omega}, \quad W(Z) = \frac{w(z)}{\omega d}, \quad P(Z) = \frac{p(r,z) - 0.5k_p r^2}{\rho\omega^2 d^2}, \quad P_R = \frac{k_p}{\rho\omega^2} \quad (15)$$

また無次元数は以下のように, レイノルズ数のみとなる.

$$Re = \frac{\omega d^2}{\nu} \quad (16)$$

5. 解析方法

5・1 半径方向の圧力勾配

境界条件(13), (14)のもとで, 式(9)-(12)を全ての項に対してスタッガード格子上で, 中心差分法により離散化し数値的に解いた. 式(10), (11), (12)には時間項を導入し陽解法により時間進行させ, 定常解が得られるまで繰り返した. 式(9)と W の境界条件とからわかるように, 式(10)における無次元の圧力勾配 P_R については, 半径方向速度成分 U を円板間に渡って Z で積分した値が 0 になるように求められる.

$$P_R = \int_0^1 \left(-U^2 + V^2 - W \frac{dU}{dZ} + \frac{1}{Re} \frac{d^2U}{dZ^2} \right) dZ \quad (17)$$

5・2 計算手順

本論文では HSMAC (Highly Simplified Marker And Cell) 法を適用し, 以下の手順に従って各従属変数を求めた.

1. 式(17)から圧力勾配 P_R を求める.
2. 時間項を導入した式(11)から速度成分 V を求める.
3. 時間項を導入した式(10), (12)から速度成分 U , W の予測値を求める.
4. 式(9)を満たすように, 圧力 P と速度成分 W を同時反復計算し, それらの修正値を求める.
5. 上記 1 - 5 の手順について, 時間項がほぼ零とみなされるまでその手順を繰り返す.

なお、格子数はZ方向に512点としたが、結果に対する格子数の依存性はほぼ無いことを確認している。

6. 計算結果

図2は、様々な Re 数に対するそれぞれ (a) 半径方向、(b) 周方向、(c) 軸方向の各速度成分、および (d) 圧力分布を示す。 Re 数が小さい極限の流れは、 $U=W=0$ かつ V が直線分布の Couette 流である。一方、 $Re=2000$ を超えたあたりから、明確に二つの境界層とコア領域が形成されることがわかる。その場合、境界層の厚さは、 Re 数の0.5乗に比例して薄くなることわかる。 $Z=1$ の回転面近傍に発達する Kármán 境界層では、遠心力により半径方向外向きの流れが誘起されている。一方で、 $Z=0$ の静止面近傍に発達する Bödewadt 境界層では、半径方向および周方向の速度成分に振動が見られる。これらの傾向は一円板流のそれぞれの結果と定性的に同じである。今回の計算結果によると、高 Re 数の場合、剛体回転するコア領域での周方向速度成分は $V_c = 0.313$ であり、その軸方向速度成分は $W_c = 0.755 / Re^{0.5}$ であった。またコアでの圧力は、 W が既知であるので、式(12)から直ちに、 $P_c = -0.285 / Re$ となることもわかる ((d)では値が小さく、それを確認出来ないため描線を割愛している)。

次に高 Re 数で剛体回転のコア領域が存在する場合に限り、円板の配置および無次元化を統一した状態で一円板流との比較を行う。 $V_c=1$ の剛体回転中に置かれた静止円板上面近傍に発達する Bödewadt 流では、 $W_c = 1.350 / Re^{0.5}$ 、 $P_c = -0.912 / Re$ である。一方、静止流体中の回転円板下面近傍に発達する Kármán 流では、 $W_c = 0.884 / Re^{0.5}$ 、 $P_c = -0.391 / Re$ である。一円板流では、いずれも二円板流 (Kármán – Bödewadt 流) より大きな値をとる。表1に、壁面上における周方向の速度勾配値とともに結果をまとめる。

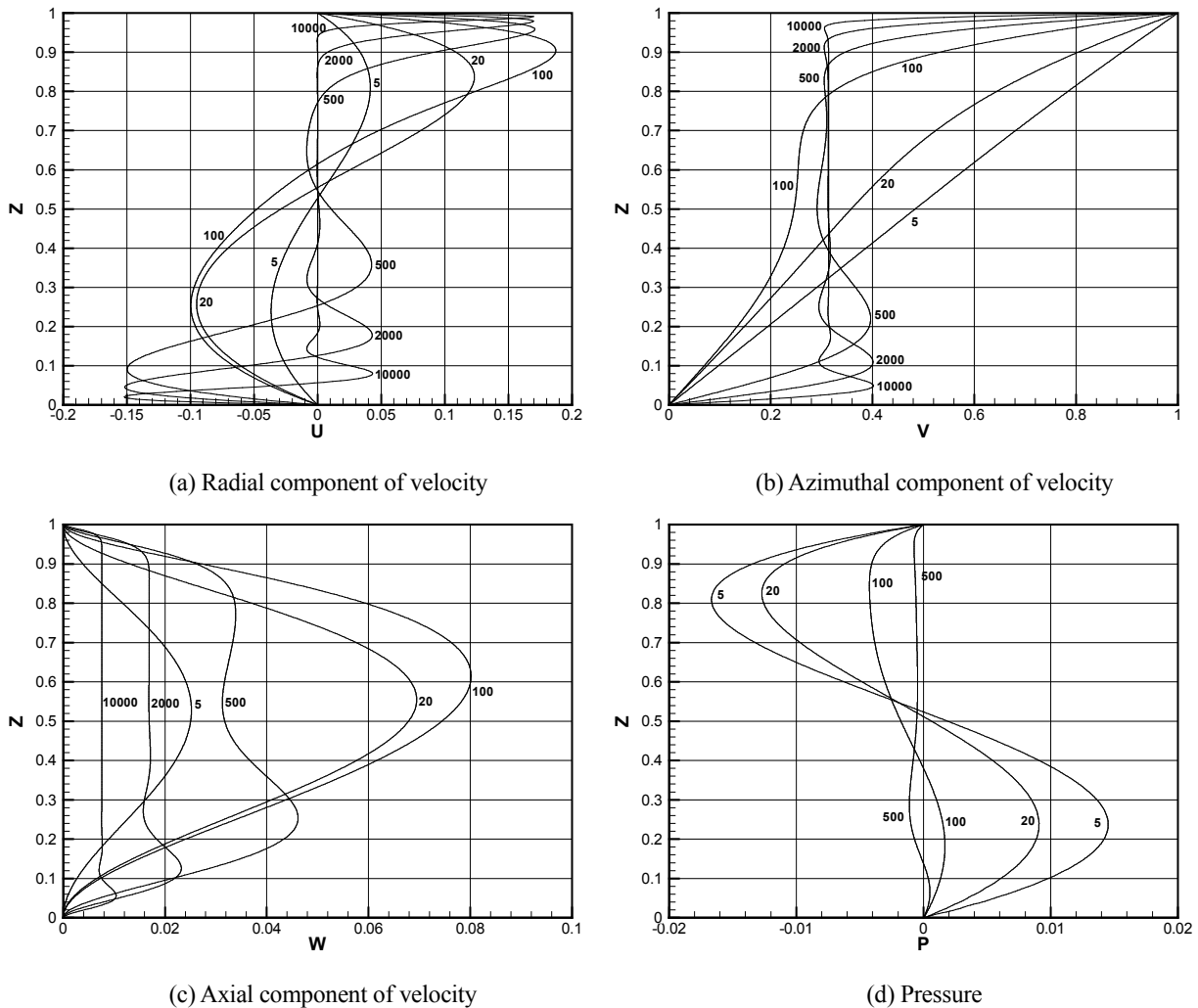


Fig. 2 The velocity and pressure profiles for the various Reynolds numbers

Table 1 Asymptotic values obtained for the large Reynolds number limit

	一円板流		二円板隙間流	
	Kármán 流	Bödewadt 流	Kármán 層	Bödewadt 層
V_w'	$0.616 Re^{0.5}$	$0.773 Re^{0.5}$	$0.526 Re^{0.5}$	$0.135 Re^{0.5}$
V_c	0.000	1.000	0.313	
W_c	$0.884 / Re^{0.5}$	$1.350 / Re^{0.5}$	$0.755 / Re^{0.5}$	
P_c	$-0.391 / Re$	$-0.912 / Re$	$-0.285 / Re$	

図3には、各 Re 数に対する周方向の速度勾配値をまとめたものを示す。 $Z=1$ 近傍の Kármán 層は速度勾配が大きく、 $Z=0$ 近傍の Bödewadt 層の速度勾配は相対的に小さいのが見てとれる。境界層とコアが明確になる $Re=1000$ 以上では、グラフの傾きは 0.5 である一方、境界層が互いに干渉する中程度の Re 数では、Bödewadt 層において複雑な挙動を示している。

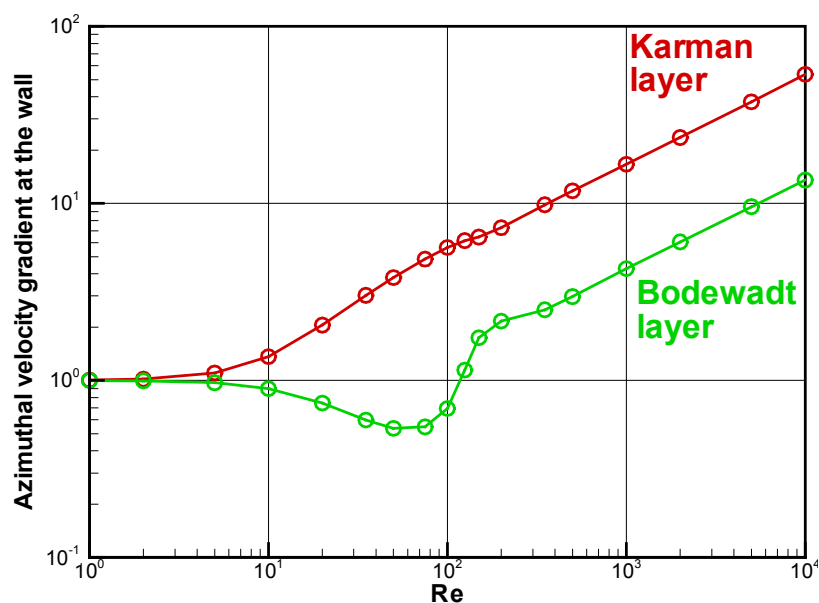


Fig. 3 The azimuthal velocity gradient at the walls for the various Reynolds numbers

7. 結言

回転円板と静止円板間の流体の流れに対して、相似解を仮定して差分法による数値解析を実施した。圧力勾配を求める数式を導出し、さらに HSMAC 法を適用することで、様々な計算条件においても精度良く二円板間の流れの相似解を求めることができることを示した。