上流差分法の離散式のまとめ

差分法における数値流体計算において，境界近傍においてのみ密な格子が求められることが多い．ここでは，図１のような不等間隔の格子点における移流項に対する風上差分法をまとめる．

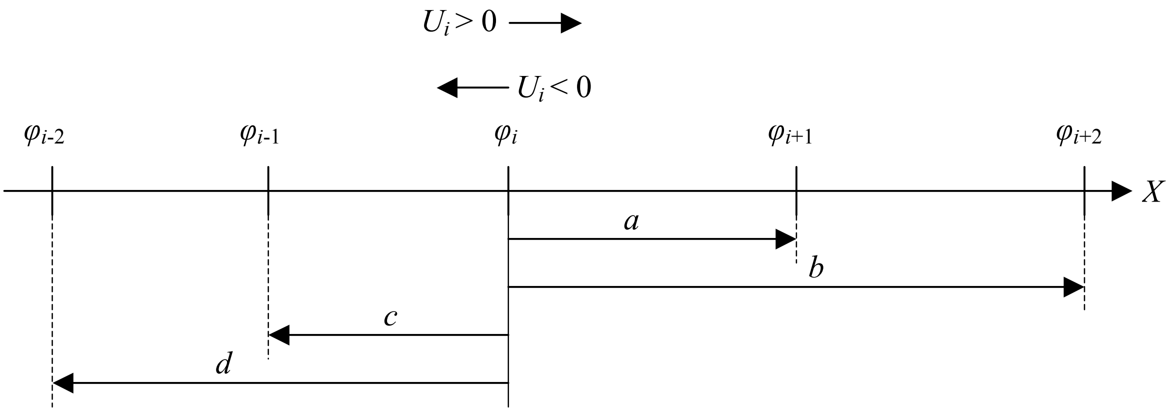

図１　格子の定義（$b > a > 0 > c > d$）

１．一次風上または二次中心差分法

$$\left(U\frac{\partial\phi}{\partial X}\right)_i = U_i\left[-\frac{c}{a(a-c)}\phi_{i+1} - \frac{a+c}{ac}\phi_i - \frac{a}{c(c-a)}\phi_{i-1} + \alpha_1\cdot D_1\left(\frac{1}{a(a-c)}\phi_{i+1} + \frac{1}{ac}\phi_i + \frac{1}{c(c-a)}\phi_{i-1}\right)\right] \tag{1}$$

２．三次風上または四次中心差分法

$$\begin{aligned}\left(U\frac{\partial\phi}{\partial X}\right)_i = U_i\Bigg[&-\frac{acd}{b(b-a)(b-c)(b-d)}\phi_{i+2} - \frac{bcd}{a(a-b)(a-c)(a-d)}\phi_{i+1} - \frac{cd(a+b)+ab(c+d)}{abcd}\phi_i \\ &-\frac{abd}{c(c-a)(c-b)(c-d)}\phi_{i-1} - \frac{abc}{d(d-a)(d-b)(d-c)}\phi_{i-2} \\ &+\alpha_3\cdot D_3\left\{\frac{1}{b(b-a)(b-c)(b-d)}\phi_{i+2} + \frac{1}{a(a-b)(a-c)(a-d)}\phi_{i+1} + \frac{1}{abcd}\phi_i \right. \\ &\left. + \frac{1}{c(c-a)(c-b)(c-d)}\phi_{i-1} + \frac{1}{d(d-a)(d-b)(d-c)}\phi_{i-2}\right\}\Bigg]\end{aligned} \tag{2}$$

ここで，式(1)および式(2)の中の数値拡散係数 D_i およびパラメータ α_i の値については，それぞれ表 1 と表 2 にまとめられる．

表１　D_iの定義

U_i	D_1	D_3
> 0	c	acd
$= 0$	0	0
< 0	a	abc

表２　α_iの定義

式番号	パラメータ	手法
(1)	$\alpha_1 = 0$	二次中心差分法
	$\alpha_1 = 1$	一次風上差分法
(2)	$\alpha_3 = 0$	四次中心差分法
	$\alpha_3 = 1$	三次風上差分法（UTOPIA スキーム）
	$\alpha_3 = 3$	三次風上差分法（Kawamura-Kuwahawa　スキーム）

３．等間隔格子の場合

速度が正の場合に，式(1)において，等間隔格子($a = -c = \Delta X$)とすると，

$$\left(U\frac{\partial\phi}{\partial X}\right)_i = \frac{U_i}{2c}\left[-\phi_{i+1} + \phi_{i-1} + \alpha_1\left(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}\right)\right] \tag{3}$$

$$\left(U\frac{\partial\phi}{\partial X}\right)_i = \begin{cases} \dfrac{U_i}{2\left(\Delta X\right)}\left(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}\right), & \left(\text{for} \quad \alpha_1 = 0\right) \\ \dfrac{U_i}{\left(\Delta X\right)}\left(\phi_i - \phi_{i-1}\right), & \left(\text{for} \quad \alpha_1 = 1\right) \end{cases} \tag{4}$$

同様，速度が正の場合に，式(2)において，等間隔格子($a = -c = \Delta X,\quad b = -d = 2\cdot\Delta X$)とすると，

$$\left(U\frac{\partial\phi}{\partial X}\right)_i = \frac{U_i}{12c}\left[\phi_{i+2} - 8\phi_{i+1} + 8\phi_{i-1} - \phi_{i-2} - \alpha_3\left(\phi_{i+2} - 4\phi_{i+1} + 6\phi_i - 4\phi_{i-1} + \phi_{i-2}\right)\right] \tag{5}$$

$$\left(U\frac{\partial\phi}{\partial X}\right)_i = \begin{cases} \dfrac{U_i}{12\left(\Delta X\right)}\left(-\phi_{i+2} + 8\phi_{i+1} - 8\phi_{i-1} + \phi_{i-2}\right), & \left(\text{for} \quad \alpha_3 = 0\right) \\ \dfrac{U_i}{6\left(\Delta X\right)}\left(2\phi_{i+1} + 3\phi_i - 6\phi_{i-1} + \phi_{i-2}\right), & \left(\text{for} \quad \alpha_3 = 1\right) \\ \dfrac{U_i}{6\left(\Delta X\right)}\left(\phi_{i+2} - 2\phi_{i+1} + 9\phi_i - 10\phi_{i-1} + 2\phi_{i-2}\right), & \left(\text{for} \quad \alpha_3 = 3\right) \end{cases} \tag{6}$$

式(2)の規則性を利用すれば，五次精度の風上差分式なども同様にして導出することができる．

参考文献　[1] T. Tagawa and H. Ozoe, “Effect of Prandtl number and computational schemes on the oscillatory natural convection in an enclosure”, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 30: 271-282, 1996.